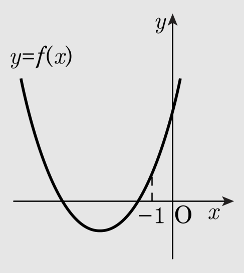
1. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서
$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$
$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$
(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\frac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$
이상에서 $-7<k<-3$
따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

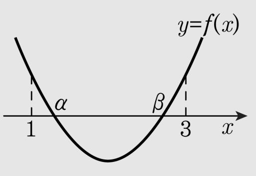
2. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면
$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(ⅰ) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$
$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ⅱ) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$
$\therefore\ a < \frac{13}{3}$

(ⅲ) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
$x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$
$\therefore\ 2 < a < 6$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

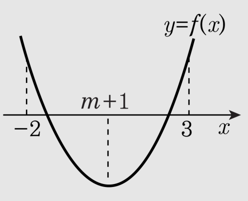
따라서, $\alpha = 4$, $\beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

3. 이차방정식 $x^2-2(m+1)x+m+3=0$의 두 실근이 -2와 3사이에 있을 때, 정수 m의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 2개

해설



$f(x)=x^2-2(m+1)x+m+3$ 으로 놓으면

(i) $\frac{D}{4}=(m+1)^2-(m+3)\geq 0$ 에서

$(m-1)(m+2)\geq 0$

$\therefore m\leq -2$ 또는 $m\geq 1$ …… ㉠

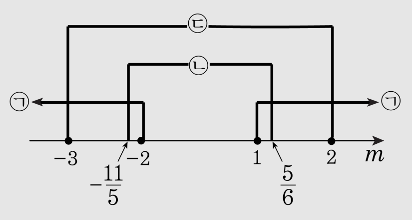
(ii) $f(-2)=5m+11>0$ 에서

$m>-\frac{11}{5}$,

$f(3)=6-5m>0$ 에서 $m<\frac{6}{5}$

$\therefore -\frac{11}{5}<m<\frac{6}{5}$ …… ㉡

(iii) 대칭축의 위치



$-2<m+1<3$

$\therefore -3<m<2$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-\frac{11}{5}<m\leq -2$ 또는 $1\leq m<\frac{6}{5}$

따라서, 정수 m은 -2, 1두 개다.

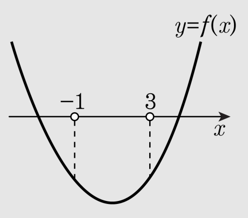
4. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0$, $f(3) \le 0$ 이어야 한다.



(ⅰ) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \le 0$, $k+3 \le 0$
$\therefore k \le -3$
(ⅱ) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \le 0$, $9k+3 \le 0$
$\therefore k \le -\frac{1}{3}$
(ⅰ), (ⅱ) 에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3 이다.

5. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근 α, β 가 $-1<\alpha<0,\ 1<\beta<2$ 일 때 다음 중 옳은 것을 모두 고르면 ? (단, $a<0$)

㉠ $c<0$	㉡ $ab<0$
㉢ $a-b+c<0$	㉣ $a+2b+4c>0$

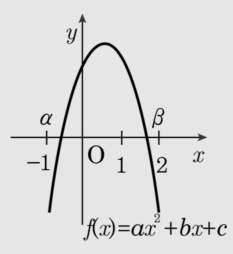
① ㉠ ② ㉡, ㉢ ③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$ 로 놓으면

$-1<\alpha<0, 1<\beta<2$ 에서



㉠) $f(0)=c>0$

㉡) 꼭짓점의 x좌표가 양이므로 $-\frac{b}{2a}>0$ $\therefore ab<0$

㉢) $f(-1)=a-b+c<0$

㉣) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c>0,\ \frac{1}{4}(a+2b+4c)>0$

$\therefore a+2b+4c>0$