1. $\frac{a}{70}$를 기약분수로 나타내면 $\frac{1}{b}$이고 이것을 소수로 나타내면 유한소수가 된다. 이때, 자연수 a와 b의 값의 합 $a+b$를 구하여라. (단, $10 < a < 20$)

▶ 답:

▷ 정답: 19

해설

$\frac{a}{70} = \frac{a}{2 \times 5 \times 7} = \frac{1}{b}$

a는 7의 배수, 단, $10 < a < 20$이므로

$a = 14$, $b = 5$

$\therefore a + b = 19$

2. 분수 $\frac{3}{700}$을 소수로 나타내었을 때, x_n은 소수점 아래 n번째 수를 나타낸다. 다음 주어진 식의 값은?

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + \cdots + x_{25}$$

① 72 ② 74 ③ 76 ④ 78 ⑤ 80

해설

$\frac{3}{700} = 0.00\dot{4}28571$

$x_1 = 0,\ x_3 = 4,\ x_5 = 8,\ x_7 = 7,\ \cdots$

$\therefore$ (준식) $= 4 \times (4 + 8 + 7) = 76$

3. 함수 $f(x) = x - 10[\frac{x}{10}]$ 라 하고 $g(x) = 3^x$ 라 할 때, $f(g(1)) + f(g(2)) + f(g(3)) + \cdots + f(g(1000))$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 5000

해설

$f(g(1)) + f(g(2)) + f(g(3)) + \cdots + f(g(1000)) = f(3^1) + f(3^2) + f(3^3) + \cdots + f(3^{1000})$

예를 들어 $f(125) = 125 - 10[\frac{125}{10}] = 125 - 10 \times 12 = 5$, $f(79) = 79 - 10 \times 7 = 9$

즉, 함수 $f(x)$ 의 값은 x 의 일의 자리의 숫자이다.

따라서 $f(3^1) = 3, f(3^2) = 9, f(3^3) = 7, f(3^4) = 1, f(3^5) = 3, \cdots$ 이므로 3^n 의 일의 자리 숫자 $3, 9, 7, 1$ 이 반복된다.

$1000 = 4 \times 250$ 이므로

$f(g(1)) + f(g(2)) + f(g(3)) + \cdots + f(g(1000))$

$= f(3^1) + f(3^2) + f(3^3) + \cdots + f(3^{1000})$

$= (3 + 9 + 7 + 1) \times 250 = 20 \times 250 = 5000$

4. 두 자연수 x, y 에 대하여 $x = y^z$ 을 $< x : y >= z$ 으로 나타내기로 할 때, $< 81 : a > + < 64 : 2 >= b$ 를 만족하는 $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a 는 소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$< 81 : a >$ 에서 $81 = 3^4$ 이므로 $a = 3$
$\therefore < 81 : 3 >= 4$
$< 64 : 2 >$ 에서 $64 = 2^6$ 이므로 $< 64 : 2 >= 6$
따라서 $< 81 : 3 > + < 64 : 2 >= 4 + 6 = 10$ 이므로 $b = 10$
$\therefore\ a + b = 3 + 10 = 13$

5. $xy+\frac{1}{z}=1,\ yz+\frac{1}{x}=2$ 일 때, $\frac{xyz^2-xyz}{(1-2x)(2x-1)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$xy+\frac{1}{z}=1,\ \frac{xyz+1}{z}=1,\ xyz=z-1\ \cdots$ ㉠

$yz+\frac{1}{x}=2,\ \frac{xyz+1}{x}=2\ ,\ xyz=2x-1\ \cdots$ ㉡

$\frac{xyz^2-xyz}{(1-2x)(2x-1)}=\frac{xyz(z-1)}{-(2x-1)^2}$

에 식 ㉠, ㉡을 대입하여 풀면,

$\frac{xyz(z-1)}{-(2x-1)^2}=\frac{xyz(xyz)}{-(xyz)^2}=-1$

6. $-1 \le x \le 1$ 일 때, $\dfrac{4-2x}{3-x}$ 의 범위를 구하면 $a \le \dfrac{4-2x}{3-x} \le b$ 라 할 때, $a+2b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\dfrac{4-2x}{3-x} = \dfrac{2(3-x)-2}{3-x} = 2 - \dfrac{2}{3-x}$ 이므로

$-1 \le x \le 1$ 의 각 변에 -1을 곱하면 $-1 \le -x \le 1$

각 변에 3을 더하면 $2 \le 3-x \le 4$

역수를 취하면 $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{3-x} \le \dfrac{1}{2}$

각 변에 -2를 곱하면 $-1 \le -\dfrac{2}{3-x} \le -\dfrac{1}{2}$

각 변에 2를 더하면 $1 \le 2 - \dfrac{2}{3-x} \le \dfrac{3}{2}$

$a=1,\ b=\dfrac{3}{2}$ 이므로 $a+2b=4$

7. $-1 \le a < 4$ 이고 $A = -3a - 2$ 일 때, A 의 값의 범위를 구하면?

① $-14 \le A < 1$ ② $-14 < A \le 1$ ③ $-1 < A \le 14$

④ $-5 \le A < 10$ ⑤ $-5 < A \le 10$

해설

$a = -1$ 일 때, $A = 1$ 이고 $a = 4$ 일 때, $A = -14$ 이다.
따라서 $-14 < A \le 1$ 이다.

8. a, b, c 는 연속하는 3 개의 3 의 배수이다. $\frac{66}{b} \le a - c \le \frac{84}{b}$ 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -36

해설

a, b, c 가 연속하는 3 의 배수이므로 $b-3, b, b+3$ 으로 놓을 수 있다.

$\frac{66}{b} \le a - c \le \frac{84}{b}$

$\frac{66}{b} \le (b-3) - (b+3) \le \frac{84}{b}$

$\frac{66}{b} \le -6 \le \frac{84}{b}$ 이므로

$\frac{66}{b} \le -6, \frac{1}{b} \le -\frac{1}{11}$

$-6 \le \frac{84}{b}, \frac{1}{b} \ge -\frac{1}{14}$

$\therefore -\frac{1}{14} \le \frac{1}{b} \le -\frac{1}{11}, b = -12$

따라서 $a = -15$, $c = -9$ 이므로

$a + b + c = -15 - 12 - 9 = -36$ 이다.

9. 일차부등식 $a(x-2) < 3(5x-3) + 12$ 의 해를 구하면? (단, $a < 15$)

① $x > \dfrac{2a-3}{a+15}$　② $x < \dfrac{a-15}{2a+3}$　③ $x > \dfrac{2a+3}{a-15}$

④ $x > \dfrac{a-15}{2a+3}$　⑤ $x < \dfrac{2a+3}{a-15}$

해설

$a(x-2) < 3(5x-3)+12$, $ax-2a < 15x-9+12$, $(a-15)x < 2a+3$

$\therefore\ x > \dfrac{2a+3}{a-15}$

10. 지하철 9 호선이 개통되면 인천공항과 강남을 30 분에 연결한다고 한다. 9 호선이 통과하는 간이역을 2 분 또는 3 분 거리 마다 설치하려고 할 때, 가능한 간이역의 조합의 개수를 구하여라. (단, 반드시 2 분과 3 분 걸리는 간이역이 1 개 이상 설치되어야 한다.)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

2 분, 3 분 걸리는 구간의 개수를 각각 x, y 라 하면 $2x+3y=30$ 에서 $y=\dfrac{30-2x}{3}$ 이다.

그런데 x, y 는 0 또는 자연수이어야 하므로 $30-2x$ 은 3 의 배수이고 $30-2x \geq 0$ 에서 $x \leq 15$ 이므로

가능한 x 의 값은 3, 6, 9, 12 이고 각각에 대한 y 의 값은 8, 6, 4, 2 이다. (반드시 2 분과 3 분 걸리는 간이역이 1 개 이상 설치되어야 한다.)

따라서 가능한 간이역의 조합의 개수는 4 개다.

11. 미지수가 2 개인 일차방정식 $\frac{3x+2y-1}{4} = \frac{2x+y+2}{3}$ 의 한 해가 $(5,\ k)$ 일 때, k 의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

해설

식의 양변에 12 를 곱하면

$3(3x+2y-1) = 4(2x+y+2),\ x+2y = 11$

$(5,\ k)$ 를 대입하면

$5+2k = 11,\ \therefore\ k = 3$

12. 다음 연립방정식의 해를 구하면?

$$\begin{cases} 2x+y-2a=4 \\ 4x+3y+2a=8 \\ 3x+y=9 \end{cases}$$

① $(2,\ 3)$ ② $(2,\ -3)$ ③ $(4,\ 3)$

④ $(4,\ -3)$ ⑤ $(3,\ -2)$

해설

$$\begin{cases} 2x+y-2a=4 & \cdots ① \\ 4x+3y+2a=8 & \cdots ② \text{에서} \\ 3x+y=9 & \cdots ③ \end{cases}$$

① + ②를 하면

$6x+4y=12$에서 $3x+2y=6$ $\cdots ④$

$$\begin{cases} 3x+y=9 & \cdots ③ \\ 3x+2y=6 & \cdots ④ \end{cases}$$

③ − ④를 하면

$x=4,\ y=-3$

13. 자연수 a, b 에 대하여 x, y, z 에 대한 연립방정식 $\frac{x+y}{a} = \frac{x+2y}{3b} = -\frac{x}{2ab} = z$ 가 무수히 많은 해집합을 가질 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$\frac{x+y}{a} = \frac{x+2y}{3b} = -\frac{x}{2ab} = z$

$x + y - az = 0 \cdots ㉠$

$x + 2y - 3bz = 0 \cdots ㉡$

$x + 2abz = 0 \cdots ㉢$

㉢에서 $x = -2abz$ 이므로 ㉠에 대입하면

$-2abz + y - az = 0$

$y = (2ab + a)z \cdots ㉣$

㉡에 ㉢, ㉣을 대입하면 $(2ab + 2a - 3b)z = 0$

그런데 $z \neq 0$ 이므로

$2ab + 2a - 3b = 0$, $2a(b+1) = 3b$

$\therefore 2a = \frac{3b}{b+1} = 3 - \frac{3}{b+1}$

이때, a, b 는 자연수이므로 $b+1 = 3$, $\therefore a = 1, b = 2$

따라서 $a + b = 3$

14. 일정한 속력으로 달리는 어떤 기차가 길이 1800m 의 터널을 통과하는 데 5분이 걸리고, 길이 600m 의 터널을 통과하는 데에는 2분이 걸렸다. 이 기차의 길이는 몇 m 인가?

① 200m ② 250m ③ 300m ④ 350m ⑤ 400m

해설

열차의 길이를 x 라고 하면

$\frac{1800+x}{5} = \frac{600+x}{2}$,

$3600 + 2x = 3000 + 5x$

$\therefore x = 200$

15. 3^n 의 일의 자리의 숫자를 $f(n)$ 이라 할 때, $f(1)+f(2)+\cdots+f(20)$ 의 값은?

① 50 ② 100 ③ 150 ④ 200 ⑤ 250

해설

$n=1$ 일 때, $3^1=3$
$n=2$ 일 때, $3^2=9$
$n=3$ 일 때, $3^3=27$, 따라서 일의 자리는 7
$n=4$ 일 때, $3^4=81$, 따라서 일의 자리는 1
$n=5$ 일 때, $3^5=243$, 따라서 일의 자리는 3
따라서 $3, 9, 7, 1$ 이 반복됨을 알 수 있다.
$\therefore f(1)+f(2)+\cdots f(20)=5(3+9+7+1)=100$

16. 두 직선 $y = ax + 2b,\ y = -(a+2)x + 4(b+1)$ 의 교점이 $\mathrm{A}(2,\ 6)$ 일 때, 두 직선과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

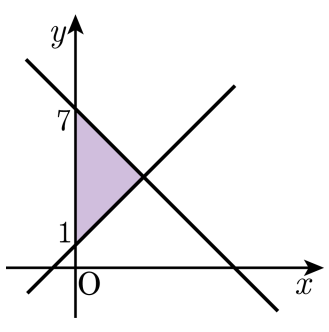
▶ 답:

▷ 정답: 24

해설

두 직선의 교점이 $\mathrm{A}(2,\ 6)$ 이므로 각각 $(2,\ 6)$ 을 대입하면
$y = ax + 2b,\ 6 = 2a + 2b,\ a + b = 3 \cdots$ ㉠
$y = -(a+2)x + 4(b+1),\ 6 = -2(a+2) + 4(b+1),$
$-a + 2b = 3 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 을 연립해서 풀면 $a = 1,\ b = 2$ 이다.
두 직선이 x 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 하고 좌표를 구하면 $\mathrm{B}(-4,\ 0), \mathrm{C}(4,\ 0)$ 이다.
두 직선과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 삼각형 ABC 의 넓이와 같으므로 $\frac{1}{2}(4+4) \times 6 = 24$ 이다.

17. 다음 그림과 같이 y축과 두 직선 $y = x + 1$, $y = -x + 7$로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하여라.



① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$y = x + 1$과 $y = -x + 7$의 교점의 좌표를 구하면
$x + 1 = -x + 7$
$2x = 6$, $x = 3$, $y = 4$
교점의 좌표는 $(3, 4)$
두 직선의 y절편이 각각 1, 7이므로
(넓이) $= \frac{1}{2} \times (7 - 1) \times 3 = 9$

18. 다음 일차함수 $y = -2x - 4$의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 점 $(1, -2)$를 지난다.

② 제 2, 3, 4 사분면을 지난다.

③ 일차함수 $y = 2x - 4$의 그래프와 x축에서 만난다.

④ x의 값이 1만큼 증가할 때, y의 값은 2만큼 증가한다.

⑤ 일차함수 $y = -2x + 1$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

해설

① $x = 1$, $y = -2$를 대입하면 $-2 \neq -2 - 4$이므로 점 $(1, -2)$를 지나지 않는다.
② 기울기와 y절편이 모두 음수이므로 제 2, 3, 4 사분면을 지난다.
③ 일차함수 $y = 2x - 4$의 그래프와 y축에서 만난다.
④ x의 값이 1만큼 증가할 때, y의 값은 -2만큼 증가한다.
⑤ 일차함수 $y = -2x + 1$의 그래프를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

19. $ab > 0,\ a-b \neq 0$ 인 상수 $a,\ b$ 에 대하여 두 일차함수 $y = ax+b,\ y = bx+a$ 의 교점이 제 4 사분면에 있을 때, 직선 $aby + ax + b = 0$ 이 지나가지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 4 사분면

해설

$y = ax+b,\ y = bx+a$ 를 연립하여 풀면

$x = \dfrac{a-b}{a-b} = 1\ (\because\ a-b \neq 0)$

따라서 교점의 좌표는 $(1,\ a+b)$ 이고 이것은 제 4 사분면에 있으므로 $a+b < 0$ 이다.

그런데 $ab > 0$ 이므로 $a < 0,\ b < 0$ 이다.

$aby + ax + b = 0,\ y = -\dfrac{1}{b}x - \dfrac{1}{a}$ 이다.

$-\dfrac{1}{b} > 0,\ -\dfrac{1}{a} > 0$ 이므로

$\therefore aby + ax + b = 0$ 는 제 1, 2, 3 사분면을 지나고 제 4 사분면은 지나지 않는다.

20. 직선 $x-ay-1=0$ 이 세 점 $(-3,\ -2)$, $(5,\ b)$, $(c,\ -4)$ 를 지날 때, $a-b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -7

해설

$(-3,\ -2)$ 를 $x-ay-1=0$ 에 대입하면,
$-3+2a-1=0,\ a=2$
$(5, b)$ 를 $x-2y-1=0$ 에 대입하면,
$5-2b-1=0,\ b=2$
$(c,\ -4)$ 를 $x-2y-1=0$ 에 대입하면,
$c+8-1=0,\ c=-7$
$\therefore\ a-b+c=2-2-7=-7$