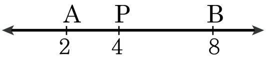
1. 다음 수직선 위의 세 점 A, B, P 에 대하여 선분 AP 와 선분 PB의 길이의 비는?



① 1 : 2 ② 2 : 3 ③ 1 : 3 ④ 2 : 5 ⑤ 1 : 4

해설

선분 AP의 길이는 $4-2=2$,
선분 PB 의 길이는 $8-4=4$ 이다.
따라서 선분 AP와 선분 PB 의 길이의 비는
$2:4=1:2$ 이다.

2. 세 점 $A(-3,\ 2)$, $B(4,\ 2)$, $C(2,\ 8)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게 중심의 좌표는?

① $(0,\ 4)$ ② $(2,\ 3)$ ③ $(2,\ 4)$
④ $(1,\ 3)$ ⑤ $(1,\ 4)$

해설

$$\left(\frac{-3+4+2}{3},\ \frac{2+2+8}{3}\right)=(1,\ 4)$$

3. 두 점 $(1,\ -2)$, $(3,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=ax+b$라 할 때, $a-b$의 값은?

① 1　　② 4　　③ 7　　④ 10　　⑤ 13

해설

두 점 $(1, -2)$, $(3, 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+2=\dfrac{6+2}{3-1}(x-1)$

$y+2=4(x-1)$

$\therefore y=4x-6$

즉, $a=4,\ b=-6$

$\therefore a-b=4-(-6)=10$

4. 두 직선 $ax - y + 3 = 0, 4x + 2y + (1 - b) = 0$이 일치할 때, ab의 값은?

① -14 ② -7 ③ 1 ④ 7 ⑤ 14

해설

두 직선 $ax - y + 3 = 0, 4x + 2y + (1 - b) = 0$이 일치하려면

$$\frac{a}{4} = \frac{-1}{2} = \frac{3}{1-b}$$

$\therefore a = -2, b = 7$

$\therefore ab = (-2) \cdot 7 = -14$

5. 두 점 $A(1, 2)$, $B(3, 4)$로부터 같은 거리에 있는 점 P가 나타내는 직선의 x절편과 y절편의 합은?

① -10 ② -4 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

$P(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$

즉, $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$이므로

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$

$y = -x + 5$

따라서 x절편은 5, y절편은 5이다.

$\therefore\ 5 + 5 = 10$

6. 좌표평면 위의 두 점 $A(3,2)$, $B(5,4)$ 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은?

① 6 ② $\sqrt{37}$ ③ $\sqrt{38}$ ④ $\sqrt{39}$ ⑤ $\sqrt{40}$

해설

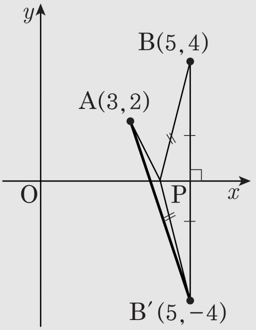
다음 그림과 같이 점 $B(5,\ 4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 $B'(5,-4)$ 라 하면

$\overline{PB}=\overline{PB'}$ 이므로

$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB'}\geq\overline{AB'}$

따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이고

$\overline{AB'}=\sqrt{(5-3)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$



7. 점 (1, 0)을 지나고 직선 $x+\sqrt{2}y+3=0$에 수직인 직선의 y절편은?

① $-\sqrt{3}$　② $-\sqrt{2}$　③ -1　④ $\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

해설

직선 $x+\sqrt{2}y+3=0$의 기울기가 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로

구하는 직선의 기울기는 $\sqrt{2}$이다.

따라서 구하는 직선은 $y=\sqrt{2}(x-1)$이므로

이 직선의 y절편은 $-\sqrt{2}$이다.

8. 두 직선 $3x-2y-4=0$, $x+2y-4=0$ 의 교점과 점 $(1,-4)$ 를 지나는 직선의 방정식은?

① $5x-y-9=0$ ② $5x+y-9=0$

③ $x-2y-1=0$ ④ $2x-3y-1=0$

⑤ $2x-y+3=0$

해설

$$\begin{cases} 3x-2y-4=0 & \cdots ㉠ \\ x+2y-4=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ + ㉡ : $x=2,\ y=1$

$\therefore$ 교점 : $(2,\ 1)$

$\therefore$ 구하는 직선은 $y-1=\dfrac{-4-1}{1-2}(x-2)=5(x-2)$

$\therefore\ 5x-y-9=0$

9. 점 $\mathrm{P}(1, 2)$ 에서 직선 $2x+y-3=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라할 때, 수선 PH 의 길이는?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

($\overline{\mathrm{PH}}$ 의 길이)

$=$ (점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$ 와 직선 $2x+y-3=0$ 과의 거리)

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PH}} = \frac{|2+2-3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

10. 점 $(4, 5)$ 와 직선 $3x-4y-2=0$ 사이의 거리를 구하면?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

거리 $d = \dfrac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 - 2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$

$= \dfrac{10}{5} = 2$

11. 원점에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때 a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 4 ② 8 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

원점 (0, 0) 에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|a\times 0+b\times 0+4|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$$

$4=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \rightarrow 2(a^2+b^2)=16$

$\therefore\ a^2+b^2=8$

12. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y-3+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x-y-3+k(x+y)=0$ 에서

$(k+1)x+(k-1)y-3=0$

원점에서 이 직선까지의 거리

$$f(k)=\frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2(k^2+1)}}$$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때

최대가 되므로 $f(k)$ 의 최대값은

$k=0$ 일 때 $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

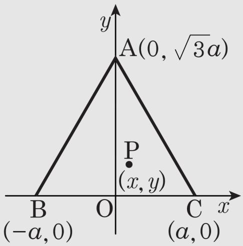
13. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?

① 삼각형 ② 직선 ③ 선분

④ 원 ⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $C(a, 0)$이라고 두면, $B(-a, 0)$, $A(0, \sqrt{3}a)$이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 이므로

$$2\left\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\right\}$$

$$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$$

정리하여 간단히 하면, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore$ 직선

14. 세 점 A$(-1,\ 0)$, B$(2,\ -3)$, C$(5,\ 3)$에 대하여 등식 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=2\overline{\mathrm{CP}}^2$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax+y+b=0$이다. 이 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 하면

주어진 조건에서,

$(x+1)^2+y^2+(x-2)^2+(y+3)^2$

$=2\{(x-5)^2+(y-3)^2\}$

$2x^2-2x+2y^2+6y+14$

$=2(x^2-10x+y^2-6y+34)$

$18x+18y-54=0$

$\Rightarrow \quad x+y-3=0$

$\therefore\ a+b=1+(-3)=-2$

15. $\triangle$ABC 의 무게중심이 $(3, 1)$ 이고 각 변 AB, BC, CA 를 $3:2$ 로 내분하는 점을 각각 P, Q, R이라 할 때, $\triangle$PQR 의 무게중심의 좌표를 구하면?

① $(2,\ 3)$ ② $(1,\ 3)$ ③ $(3,\ 2)$

④ $(2,\ 2)$ ⑤ $(3,\ 1)$

해설

세 점을 $(a, d), (b, e), (c, f)$ 라 하면,
무게중심이 $(3, 1)$ 이므로,

$$\frac{a+b+c}{3} = 3,\ \frac{d+e+f}{3} = 1 \cdots ㉠$$

변 AB, BC, CA 를 $3:2$ 로 내분하는
점 P, Q, R 의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{2a+3b}{3+2}, \frac{2d+3e}{3+2}\right) = \left(\frac{2a+3b}{5}, \frac{2d+3e}{5}\right)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{2b+3c}{3+2}, \frac{2e+3f}{3+2}\right) = \left(\frac{2b+3c}{5}, \frac{2e+3f}{5}\right)$$

$$\mathrm{R}\left(\frac{2c+3a}{3+2}, \frac{2f+3d}{3+2}\right) = \left(\frac{2c+3a}{5}, \frac{2f+3d}{5}\right)$$ 이며,

$\triangle$PQR 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{5(a+b+c)}{5\cdot 3}, \frac{5(d+e+f)}{5\cdot 3}\right)$$

$$= \left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{d+e+f}{3}\right)$$

$\therefore$ ㉠에 의해 $(3,\ 1)$

해설

변을 일정하게 내분하는 점으로 이루어진 삼각형의 무게중심은 원래 삼각형의 무게중심과 같다.
$\therefore (3,\ 1)$

16. 두 점 $A(3,0)$, $B(0,2)$에 대하여 $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$를 만족하는 점 P의 자취의 방정식은?

① $-3x+2y+9=0$

② $3x+2y=0$

③ $6x-4y+9=0$

④ $-3x+2y=0$

⑤ $-6x+4y-5=0$

해설

구하는 점을 $P(x,y)$라 하면

$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$에서

$(x-3)^2+y^2-\{x^2+(y-2)^2\}=5$

정리하면 $-6x+4y=0$

$\therefore -3x+2y=0$

17. 두 직선 $x+y-1=0$과 $mx-y+m-2=0$이 제1사분면에서 만날 때, m의 값의 범위는?

① $\frac{1}{2}<m<2$　② $\frac{1}{2}<m<3$　③ $1<m<2$

④ $1<m<3$　⑤ $2<m<4$

해설

$mx-y+m-2=0$을 m에 대하여 정리하면
$(x+1)m-y-2=0$이므로 m의 값에 관계없이
항상 점 $(-1,-2)$를 지난다.
또, 직선 $x+y-1=0$의 x절편은 1, y절편은 1이다.
따라서 두 직선이 제1사분면에서 만나려면
직선 $(x+1)m-y-2=0$이 점 $(0,1)$을 지나는
직선과 점 $(1,0)$을 지나는 직선 사이에 있어야 한다.
직선 $(x+1)m-y-2=0$에 대하여
(ⅰ) 점 $(0,\ 1)$을 지날 때, $m-1-2=0$
$\therefore\ m=3$
(ⅱ) 점 $(1,\ 0)$을 지날 때, $2m-2=0$
$\therefore\ m=1$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $1<m<3$

18. 두 직선 $3x-2y+1=0,\ 3x-2y-4=0$ 사이의 거리를 구하면?

① $\frac{\sqrt{13}}{13}$ ② $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ ③ $\frac{5\sqrt{13}}{13}$
④ $\frac{6\sqrt{13}}{5}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{13}}{5}$

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점에서 나머지 직선까지의 거리를 구하면 된다.

$ex)3x-2y+1=0$의 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\left|-2\times\frac{1}{2}-4\right|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{13}}{13}$$

19. 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식 중에서 기울기가 양수인 것은?

① $y=x$ ② $y=\frac{1}{2}x$ ③ $y=\frac{1}{3}x$
④ $y=\frac{1}{4}x$ ⑤ $y=\frac{1}{5}x$

해설

$\mathrm{P}(x,\ y)$ 라 하면,

(i) $2x-y-1=0$ 까지의 거리 d_1 은

$$d_1=\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{4+1}}$$

(ii) $x+2y-1=0$ 까지의 거리 d_2 는

$$d_2=\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1+4}}$$

$d_1=d_2$ 이므로 $|2x-y-1|=|x+2y-1|$

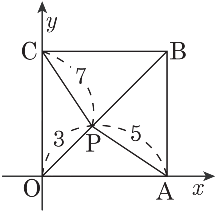
$\therefore\ 2x-y-1=\pm(x+2y-1)$

즉, $x-3y=0$, $3x+y-2=0$

그런데 기울기가 양수이므로 $x-3y=0$

$\therefore\ y=\frac{1}{3}x$

20. 다음 그림과 같이 정사각형 OABC의 내부의 점 P에 대하여 $\overline{OP} = 3$, $\overline{AP} = 5$, $\overline{CP} = 7$일 때 선분 PB의 길이는?



① $2\sqrt{15}$ ② $\sqrt{65}$ ③ $\sqrt{70}$

④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

정사각형의 한 변의 길이를 a, 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & \cdots ㉠ \\ (a-x)^2 + y^2 = 25 & \cdots ㉡ \\ x^2 + (a-y)^2 = 49 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

선분 PB의 길이는

$\overline{PB} = \sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2}$이다.

㉡+㉢−㉠에서

$(a-x)^2 + (a-y)^2 = 25 + 49 - 9 = 65$

따라서 $\overline{PB} = \sqrt{65}$