1. $x = ab$, $y = a^2 + b^2$ 이고 $a + b = 5$, $ab = 3$ 일 때, $\sqrt{(x-y)^2} + \sqrt{(x+y)^2}$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 6 ② 8 ③ 32 ④ 38 ⑤ 40

해설

$x = ab = 3$

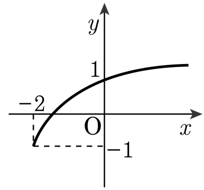
$y = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 25 - 6 = 19$

$x - y < 0$, $x + y > 0$ 이므로

(준식) $= |x-y| + |x+y|$

$= -(x-y) + (x+y) = 2y = 38$

2. 함수 $y = a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x축의 교점의 좌표는? (단, $a,\ b,\ c$ 는 상수)

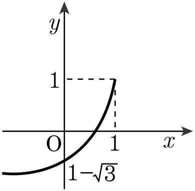


① $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$ ② $\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$
③ $\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$ ④ $(-\sqrt{2},\ 0)$
⑤ $(-\sqrt{3},\ 0)$

해설

함수 $y = a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프는
함수 $y = a\sqrt{x}$ 의 그래프를
x축의 방향으로 $-b$ 만큼, y축의 방향으로
c만큼 평행 이동시킨 것이므로
$b = 2\ ,\ c = -1$
$\therefore\ y = a\sqrt{x+b}+c = a\sqrt{x+2}-1$
한편, 이 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$1 = a\sqrt{0+2}-1$
$\therefore\ a = \sqrt{2}$
따라서, 함수 $y = \sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$ 의 그래프와
x축의 교점의 x좌표를 구하면
$0 = \sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$
$\sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$x+2 = \frac{1}{2}$
$\therefore\ x = -\frac{3}{2}$

3. 무리함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

주어진 그림은 $y=-\sqrt{ax}$ 의 그래프를
x축 방향으로 1, y축 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 $y-1=-\sqrt{a(x-1)}$
즉 $y=-\sqrt{a(x-1)}+1$
그런데 이 그래프가 점 $(0, 1-\sqrt{3})$을 지나므로
$1-\sqrt{3}=-\sqrt{-a}+1$,
$\therefore a=-3$
$\therefore\ y=-\sqrt{-3(x-1)}+1$
$\therefore\ a+b+c=(-3)+3+1=1$

4. 함수 $y = \sqrt{2x-8}+a$ 의 최솟값이 -3 이고, 이 함수의 그래프가 점 $(b,\ 1)$ 을 지날 때, $\dfrac{b}{a}$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$y = \sqrt{2x-8}+a = \sqrt{2(x-4)}+a$

주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다.

i) 함수의 정의역은 $\{x \mid x \geq 4\}$ 이므로

$x = 4$ 일 때 최솟값 -3 을 갖는다.

$-3 = \sqrt{2 \cdot 4 - 8}+a \quad \therefore\ a = -3$

ii) 함수의 그래프가 점 $(b,\ 1)$ 을 지나므로

$1 = \sqrt{2b-8}-3 \quad \therefore\ b = 12$

i), ii) 에 의해 $\dfrac{b}{a} = \dfrac{12}{-3} = -4$

5. $a=\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $b=\sqrt{2-\sqrt{3}}+1$일 때, a^2+b^2-ab-a의 값을 구하면?

① 1　② -1　③ 2

④ $4-2\sqrt{2}$　⑤ $2-\sqrt{2}$

해설

$$a=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

$$b=\sqrt{2-\sqrt{3}}+1=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}+1$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+1=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+1$$

$$b-1=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}a^2+b^2-ab-a&=(a-b)^2+ab-a\\&=(a-b)^2+a(b-1)\\&=(\sqrt{2}-1)^2+1\\&=4-2\sqrt{2}\end{aligned}$$

6. $x = \dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ 일 때, $x^4 + x^2y^2 + y^4 + 1$ 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{3}$ ② 1 ③ 99 ④ 100 ⑤ 101

해설

$$x = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$x + y = 2\sqrt{3}$, $xy = 1$

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 12 - 2 = 10$

$x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = 100 - 2 = 98$

$\therefore\ x^4 + x^2y^2 + y^4 + 1 = 98 + 1 + 1 = 100$

7. $x = \sqrt{3-\sqrt{8}}$일 때 $\dfrac{x^3+x^2-3x+6}{x^4+2x^3+2x+9}$의 값은?

① 1　　② 2　　③ $\dfrac{1}{2}$　　④ $\dfrac{1}{4}$　　⑤ $\dfrac{1}{3}$

해설

$x = \sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$ 에서

$x+1=\sqrt{2} \rightarrow x^2+2x-1=0$

분자 : x^3+x^2-3x+6

$= (x^2+2x-1)(x-1)+5=5$

분모 : x^4+2x^3+2x+9

$= (x^2+2x-1)(x^2+1)+10=10$

$\therefore$ 준식 $= \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

8. 두 함수 f, g 가 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=\sqrt{x}+1$ 일 때, $0\le x\le 4$ 에서 함수 $y=(f\circ g)(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

해설

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x}+1)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}+1+1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$\sqrt{x}=t$ 로 놓으면

$0\le x\le 4$ 에서 $0\le t\le 2$ 이므로

주어진 함수는 $y=\dfrac{1}{t+2}(0\le t\le 2)$

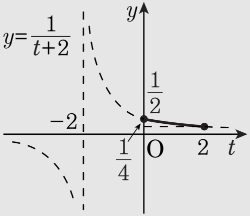
따라서 다음 그림에서 $t=0$ 일 때

최댓값은 $\dfrac{1}{2}$,

$t=2$ 일 때

최솟값은 $\dfrac{1}{4}$ 이므로

구하는 합은 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

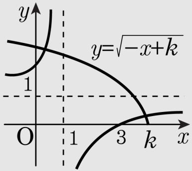


9. 함수 $y = \dfrac{x-3}{x-1}$ 과 $y = \sqrt{-x+k}$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = \dfrac{x-3}{x-1} = \dfrac{-2}{x-1} + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 주어진 분수함수의 그래프와 함수 $y = \sqrt{-x+k}$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$k \geq 3$ 이어야 하므로 k 의 최솟값은 3이다.