

1. 직선 $x+ay+3=0$ 이 $2x-3y-5=0$ 에 평행하도록 상수 a 의 값은?

- ① $\frac{3}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

해설

두 직선 $x+ay+3=0$, $2x-3y-5=0$ 이 평행

$$\frac{2}{1} = \frac{-3}{a} \neq \frac{-5}{3}, \text{ 즉 } \frac{2}{1} = \frac{-3}{a}$$

$$\therefore a = -\frac{3}{2}$$

2. 두 직선 $y = x + 1$, $y = -2x + 4$ 의 교점과 점 $(-1, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ ② $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ③ $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 3$

해설

$y = x + 1 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$
 $y = -2x + 4 \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$ 에서
두 직선의 교점을 지나는 방정식은
 $(x - y + 1) + k(2x + y - 4) = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로
 $(-1 - 3 + 1) + k \cdot \{2 \cdot (-1) + 3 - 4\} = 0$
 $\therefore k = -1$
따라서, $k = -1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

3. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x - y - 3 + k(x + y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 상수이다.)

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x - y - 3 + k(x + y) = 0$ 에서
 $(k + 1)x + (k - 1)y - 3 = 0$
원점에서 이 직선까지의 거리

$$f(k) = \frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2 + (k-1)^2}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{2(k^2 + 1)}}$$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때
최대가 되므로 $f(k)$ 의 최댓값은

$$k = 0 \text{ 일 때 } \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

4. 두 점 A(-3, 4), B(1, -2) 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$ ② $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 13$

③ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$ ④ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 10$

⑤ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$

해설

A(-3, 4), B(1, -2)가 지름의 양 끝점이므로
 $\overline{AB}$ 의 중점이 원의 중심 O(-1, 1) 이고,

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB} = r$$

$$\begin{aligned}\text{반지름 } r = \overline{OA} &= \sqrt{(-3+1)^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\end{aligned}$$

$$\therefore \text{원의 방정식은 } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$$

5. x 축에 접하는 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 의 중심의 좌표가 $(3, -2)$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

중심의 좌표가 $(3, -2)$ 인 원이 x 축에 접하므로

반지름의 길이는 2 이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 2^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$$

$$\therefore a + b + c = -6 + 4 + 9 = 7$$

6. 직선 $(a+2)x - y - a + b = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 45° 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = (a+2)x - a + b$ 에서
기울기 $= a+2 = \tan 45^\circ = 1$
 $\therefore a = -1$
 y 절편 $-a + b = 4$
 $\therefore b = 3$
 $\therefore a + b = 2$

7. A (1, 1), B (-2, -3), C ($k, k + 1$)이 일직선 위에 있도록 하는 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

A, B, C가 일직선 위에 있으려면
 $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 의 기울기가 일치해야 한다.

$$\therefore \frac{-3-1}{-2-1} = \frac{k+1-(-3)}{k-(-2)}$$

$$\Rightarrow \therefore k = 4$$

8. 직선 $ax + by + c = 0$ 에 대하여 $ab < 0, bc > 0$ 일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$ax + by + c = 0$ 에서

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

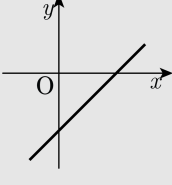
주어진 조건에서

$ab < 0, bc > 0$ 이므로

$$-\frac{a}{b} > 0, -\frac{c}{b} < 0$$

$\therefore$ (기울기) > 0 , (y 절편) < 0

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로 지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.



9. 다음 두 직선 $y = (2a + 1)x - a + 2$, $y = (a + 2)x + 2$ 가 서로 수직일 때, a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : $-\frac{3}{2}$ 또는 -1.5

해설

$$(2a + 1)(a + 2) = -1$$

$$2a^2 + 5a + 3 = 0$$

$$(2a + 3)(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } -\frac{3}{2}$$

10. 두 점 $A(-2, -1)$, $B(4, 3)$ 에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

선분 AB의 중점의 좌표는 $(1, 1)$

선분 AB의 기울기는 $\frac{3 - (-1)}{4 - (-2)} = \frac{2}{3}$

따라서, 선분 AB의 수직이등분선은 점 $(1, 1)$ 을 지나고, 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 인 직선이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$

즉, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

따라서, $a + b = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$

11. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $P(a, b)$ 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k 에 관하여 정리하면

$$(x+2)k^2 + (x^2+x-2)k + (1-y) = 0$$

k 에 관한 항등식이므로

$$x+2=0, x^2+x-2=0, 1-y=0$$

$$\therefore x=-2, y=1$$

$\therefore$ 구하는 점의 좌표는 $(-2, 1)$

$$\therefore a=-2, b=+1$$

$$\therefore a+b=-1$$

12. 이차함수 $y = 3x^2 + 18x + 35$ 의 꼭지점에서 직선 $4x + 3y + 8 = 0$ 까지의 거리는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$y = 3x^2 + 18x + 35$$

$$\Rightarrow y = 3(x + 3)^2 + 8$$

$$\Rightarrow \text{꼭지점: } (-3, 8)$$

$4x + 3y + 8 = 0$ 까지의 거리를 구하면,

$$\frac{|4 \times (-3) + 3 \times 8 + 8|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4$$

13. 점 A(2, 0) 를 지나고 직선 $y = 2x + 1$ 에 수직인 직선을 l_1 , 점 B(-4, 0) 를 지나고 직선 $y = 2x + 1$ 에 수직인 직선을 l_2 라고 할때, 두 직선 l_1 , l_2 사이의 거리는?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

두 직선 l_1 , l_2 는 평행하므로
두 직선 사이의 거리는 직선 l_2 위의 한 점 B 와 직선 l_1 사이의 거리와 같다.

직선 l_1 은 직선 $y = 2x + 1$ 과 수직이고

점A(2, 0) 을 지나므로 직선 l_1 의 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\therefore x + 2y - 2 = 0$$

따라서, 점 B(-4, 0) 과 직선 l_1 사이의 거리는

$$\frac{|-4 + 0 - 2|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

14. 다음 두 직선 $3x + 4y = 21$, $3x + 4y = 11$ 사이의 거리를 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선과의 거리를 구하면 된다.

$3x + 4y = 21$ 의 점 $(7, 0)$

$$\Rightarrow \frac{|7 \times 3 + 0 \times 4 - 11|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

15. 세 꼭지점이 $A(1, 2)$, $B(-1, 2)$, $C(-2, 0)$ 로 주어지는 삼각형 ABC 의 넓이는?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

점 $A(1, 2)$ 에서 직선 BC 에 이르는 거리를 구하여 높이로 하고, $\overline{BC}$ 의 길이를 밑변의 길이로 하여 삼각형의 넓이를 구한다. 직선 BC 의 방정식은 $2x - y + 4 = 0$ 이므로,
점 $A(1, 2)$ 에서 직선 BC 에 이르는 거리는 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.
변 BC 의 길이: $\sqrt{5}$
 $\therefore \triangle ABC = \sqrt{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{2} = 2$
 $\therefore \triangle ABC = 2$

해설

세꼭지점이 주어질 때 넓이는
 $S = \frac{1}{2}|(1 \times 2) + (-1 \times 0) + (-2 \times 2) - (-1 \times 2) + (-2 \times 2) + (1 \times 0)| = 2$

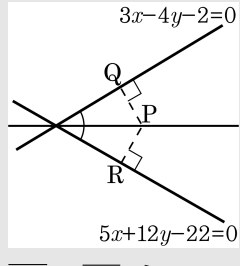
16. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q,R이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$$13(3X-4Y-2) = \pm 5(5X+12Y-22)$$

$$\text{즉, } 13(3X-4Y-2) = 5(5X+12Y-22) \text{ 또는}$$

$$13(3X-4Y-2) = -5(5X+12Y-22) \text{ 정리하면}$$

$$x-8y+6=0 \text{ 또는 } 8x+y-17=0 \text{ 에서}$$

기울기가 양이므로

$$\therefore x-8y+6=0$$

$$\therefore a+b+c=-1$$

17. 점 A(6, 2)와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{AP}$ 를 1 : 3으로 내분하는 점의 자취는?

- ① $x-2y-8=0$ ② $x+2y-8=0$ ③ $x-2y+8=0$
④ $x+2y+8=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

P (a , b)라 하면 $a+2b-2=0 \cdots \textcircled{1}$

$\overline{AP}$ 의 1 : 3 내분점을 Q (x , y)라 하면

$$Q(x, y) = \left(\frac{a+18}{1+3}, \frac{b+6}{1+3} \right)$$

$$x = \frac{a+18}{1+3}, y = \frac{b+6}{1+3}$$

$$a = 4x-18, b = 4y-6$$

$\textcircled{1}$ 에 대입하면,

$$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$$

18. 점 Q가 직선 $2x + y - 4 = 0$ 위를 움직일 때, 점 A(-2, 3)과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

- ① $4x + 2y - 3 = 0$ ② $2x + 3y + 1 = 0$
③ $4x - 3y + 1 = 0$ ④ $x - 4y - 3 = 0$
⑤ $-x + y + 2 = 0$

해설

점 A(-2, 3), Q(x, y)의 중점의 좌표를

P(X, Y)라 하면,

$$P(X, Y) = P\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) \text{이므로}$$

$$X = \frac{x-2}{2}, Y = \frac{y+3}{2}$$

$$\therefore x = 2X + 2, y = 2Y - 3$$

이것을 $2x + y - 4 = 0$ 에 대입하면

$$2(2X + 2) + (2Y - 3) - 4 = 0$$

$$4X + 2Y - 3 = 0$$

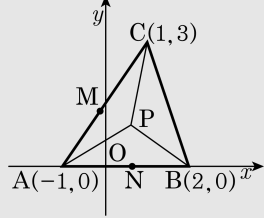
$$\therefore 4x + 2y - 3 = 0$$

19. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 3)$ 이 있다. $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P 가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P 가 그리는 도형의 길이는?

- ① $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P 가 $\triangle ABC$ 의 내부의 점이고
 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$$\therefore \triangle BPC = \frac{1}{2} \triangle ABC$$

점 P 는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M , N 을 잇는 선분 위에 있다.

$$\text{그런데 } M\left(0, \frac{3}{2}\right), N\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\text{점 } P \text{의 자취 } \overline{MN} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

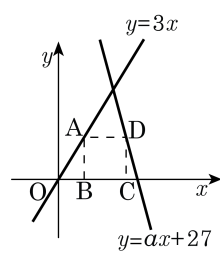
20. 두 점 A(0, 0), B(3, 3)에 대하여 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \geq 2$ 가 되도록 점 P가 움직일 때, 점 P가 그리는 자취의 넓이는?

- ① 8π ② $2\sqrt{2}\pi$ ③ 4π ④ $4\sqrt{2}\pi$ ⑤ 16π

해설

점 P를 (x, y) 라 하면 $\overline{AP} \geq 2\overline{BP}$ 이므로
 $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 2\sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}$
양변을 제곱하면 $x^2 + y^2 \geq 4(x-3)^2 + 4(y-3)^2$
 $\therefore x^2 - 8x + y^2 - 8y + 24 \leq 0$
즉, $(x-4)^2 + (y-4)^2 \leq 8$
따라서 구하는 자취는 중심이 (4, 4) 이고, 반지름이 $2\sqrt{2}$ 인 원의 내부이다.
그러므로 구하는 넓이는 8π 이다.

21. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD가 있다. 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프가 점 A를 지나고, 일차함수 $y = ax + 27$ 의 그래프가 점 D를 지날 때, 기울기 a 의 값은? (단, 두 점 B, C는 x 축 위의 점이다.)

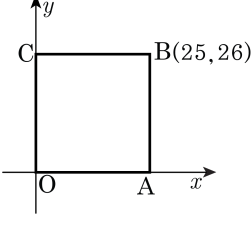


- ① -4 ② $-\frac{9}{2}$ ③ -5
 ④ $-\frac{11}{2}$ ⑤ -6

해설

$\overline{AB} = 3$ 이므로 점 A의 y 좌표는 3이고,
 점 A는 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프 위의 점이므로 x 좌표가 1이다.
 점 A와 x 좌표가 같은 점 B의 좌표는 (1, 0)이고, $\overline{BC} = 3$ 이므로
 점 C의 좌표는 (4, 0)이다.
 점 C와 x 좌표가 같고, 점 A와 y 좌표가 같은 점 D의 좌표는 (4, 3)이다.
 점 D가 일차함수 $y = ax + 27$ 위의 점이므로 $x = 4, y = 3$ 를
 대입하면 $3 = a \times 4 + 27$
 $\therefore a = -6$

22. 좌표평면 위에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 한다.
직선 $y = \frac{3}{8}x + 1$ 은 아래 그림과 같은 직사각형 OABC 내부 (경계선 제외)의 격자점을 모두 몇 개 지나는가?



- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

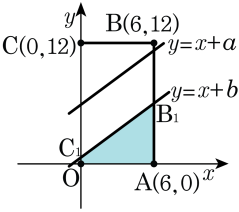
해설

$y = \frac{3}{8}x + 1$ 에서 x 가 8의 배수이면 y 도 정수가 된다.

$0 < x < 25$, $0 < y < 26$ 에서 조건을 만족하는 정수의 순서쌍을 구하면

(8, 4), (16, 7), (24, 10)으로 모두 3개의 격자점을 지난다.

23. 네 점 $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(6,12)$, $C(0,12)$ 를 꼭지점으로 하는 사각형 $OABC$ 가 있다. 그림과 같이 두 직선 $y = x + a$, $y = x + b$ 가 사각형 $OABC$ 의 넓이를 삼등분할 때, ab 의 값은?



- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

사각형 $OABC$ 의 넓이가 72이므로
사각형 OAB_1C_1 의 넓이는 24이다.

$\frac{1}{2}(b + 6 + b) \times 6 = 24$ 이므로 $b = 1$
같은 방법으로 $a = 5$
 $\therefore ab = 5$

24. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의 조건은?

$$3x + y + 2 = 0, \quad x + 3y + k = 0, \quad 2x - y + 3 = 0$$

- ① $k \neq -2$ ② $k \neq -3$ ③ $k \neq -4$
④ $k \neq -7$ ⑤ $k \neq -11$

해설

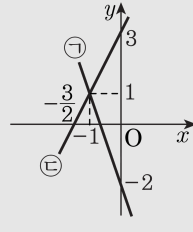
$$3x + y + 2 = 0 \dots \textcircled{7}$$

$x + 3y + k = 0 \dots \textcircled{L}$ 일 때,

$$2x - y + 3 = 0 \dots \textcircled{C}$$

다음 그림과 같이

세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.



㉠, ㉡, ㉢ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.

㉠과 ㉡을 연립하여 교점의 좌표를 구하면 $(-1, 1)$ 이다.

이 점을 $\mathbb{L}$ 에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1 + 3 + k \neq 0$, $\therefore k \neq -2$

25. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 원점에서부터의 거리가 1 인 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1 또는 2
- ③ 4
- ④ -2 또는 4
- ⑤ 0 또는 4

해설

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $x-2y+3+k(x-y+1)=0$ 으로 나타낼 수 있다. 이 식을 정리하면 $(1+k)x+(-2-k)y+(3+k)=0 \cdots \textcircled{1}$ 원점에서 이 직선까지의 거리가 1 이므로 $\frac{3+k}{\sqrt{(1+k)^2+(-2-k)^2}}=1$ 양변에 제곱하여 정리하면 $(3+k)^2=(1+k)^2+(-2-k)^2, k^2=4$ $\therefore k=\pm 2$ 이것을 ①에 대입하여 정리하면 $3x-4y+5=0$ 또는 $x-1=0$ 따라서 $a+b+c$ 는 0 또는 4