1. 직선 $x+ay+3=0$이 $2x-3y-5=0$에 평행하도록 상수 a의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

해설

두 직선 $x+ay+3=0,\ 2x-3y-5=0$이 평행

$\frac{2}{1}=\frac{-3}{a}\neq\frac{-5}{3}$, 즉 $\frac{2}{1}=\frac{-3}{a}$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2}$

2. 두 직선 $y = x + 1, y = -2x + 4$의 교점과 점 $(-1, 3)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ ② $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ③ $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

④ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 3$

해설

$y = x + 1 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$

$y = -2x + 4 \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$에서

두 직선의 교점을 지나는 방정식은

$(x - y + 1) + k(2x + y - 4) = 0 \cdots\cdots$ ㉠

㉠이 점 $(-1, 3)$을 지나므로

$(-1 - 3 + 1) + k \cdot \{2 \cdot (-1) + 3 - 4\} = 0$

$\therefore\ k = -1$

따라서, $k = -1$ 을 ㉠에 대입하면

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

3. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y-3+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x-y-3+k(x+y)=0$ 에서

$(k+1)x+(k-1)y-3=0$

원점에서 이 직선까지의 거리

$$f(k)=\frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2(k^2+1)}}$$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때

최대가 되므로 $f(k)$ 의 최대값은

$k=0$ 일 때 $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

4. 두 점 $A(-3,\ 4)$, $B(1,\ -2)$ 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=13$

② $(x-1)^2+(y+1)^2=13$

③ $(x-1)^2+(y+1)^2=10$

④ $(x+1)^2+(y-1)^2=10$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=9$

해설

$A(-3,\ 4)$, $B(1,\ -2)$가 지름의 양 끝점이므로

$\overline{AB}$ 의 중점이 원의 중심 $O(-1,\ 1)$ 이고,

$$\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{OA}=\overline{OB}=\mathrm{r}$$

반지름 $r=\overline{OA}=\sqrt{(-3+1)^2+(4-1)^2}$

$=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$\therefore$ 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=13$

5. x 축에 접하는 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 의 중심의 좌표가 $(3,\ -2)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

해설

중심의 좌표가 $(3,\ -2)$ 인 원이 x 축에 접하므로
반지름의 길이는 2 이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+2)^2=2^2$
$\therefore\ x^2+y^2-6x+4y+9=0$
$\therefore\ a+b+c=-6+4+9=7$

6. 직선 $(a+2)x-y-a+b=0$ 이 x 축의 양의 방향과 $45°$ 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y=(a+2)x-a+b$ 에서

기울기$=a+2=\tan 45°=1$

$\therefore\ a=-1$

y 절편 $-a+b=4$

$\therefore\ b=3$

$\therefore\ a+b=2$

7. A $(1,1)$, B $(-2,-3)$, C $(k, k+1)$이 일직선 위에 있도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

A, B, C가 일직선 위에 있으려면
$\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 기울기가 일치해야 한다.

$$\therefore \quad \frac{-3-1}{-2-1} = \frac{k+1-(-3)}{k-(-2)}$$

$$\Rightarrow \quad \therefore\ k = 4$$

8. 직선 $ax+by+c=0$에 대하여 $ab<0$, $bc>0$일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$ax+by+c=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

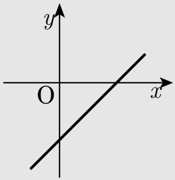
주어진 조건에서

$ab<0$, $bc>0$ 이므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$

$\therefore$ (기울기)>0 , (y 절편)<0

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로



지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.

9. 다음 두 직선 $y=(2a+1)x-a+2$, $y=(a+2)x+2$ 가 서로 수직일 때, a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : $-\frac{3}{2}$ 또는 -1.5

해설

$(2a+1)(a+2)=-1$

$2a^2+5a+3=0$

$(2a+3)(a+1)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $-\frac{3}{2}$

10. 두 점 A$(-2,\ -1)$, B$(4,\ 3)$ 에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

선분 AB 의 중점의 좌표는 $(1,\ 1)$

선분 AB 의 기울기는 $\dfrac{3-(-1)}{4-(-2)} = \dfrac{2}{3}$

따라서, 선분 AB 의 수직이등분선은 점 $(1,\ 1)$ 을 지나고, 기울기가 $-\dfrac{3}{2}$ 인 직선이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = -\dfrac{3}{2}(x-1)$

즉, $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$

따라서, $a + b = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2} = 1$

11. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 할 때 $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k에 관하여 정리하면

$(x+2)k^2 + (x^2 + x - 2)k + (1-y) = 0$

k에 관한 항등식이므로

$x+2=0,\ x^2+x-2=0,\ 1-y=0$

$\therefore x=-2,\ y=1$

$\therefore$ 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$

$\therefore\ a=-2,\ b=+1$

$\therefore\ a+b=-1$

12. 이차함수 $y = 3x^2 + 18x + 35$ 의 꼭지점에서 직선 $4x + 3y + 8 = 0$ 까지의 거리는?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$y = 3x^2 + 18x + 35$

$\Rightarrow \quad y = 3(x+3)^2 + 8$

$\Rightarrow$ 꼭지점: $(-3, 8)$

$4x + 3y + 8 = 0$ 까지의 거리를 구하면,

$$\frac{|4 \times (-3) + 3 \times 8 + 8|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4$$

13. 점 A(2, 0) 를 지나고 직선 $y = 2x+1$ 에 수직인 직선을 l_1 , 점 B(−4, 0) 를 지나고 직선 $y = 2x+1$ 에 수직인 직선을 l_2 라고 할때, 두 직선 l_1 , l_2 사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

두 직선 l_1 , l_2 는 평행하므로
두 직선 사이의 거리는 직선 l_2 위의 한 점 B 와 직선 l_1 사이의 거리와 같다.
직선 l_1 은 직선 $y = 2x+1$ 과 수직이고
점A(2, 0) 을 지나므로 직선 l_1 의 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}(x-2)$$

$$\therefore x + 2y - 2 = 0$$

따라서, 점 B(−4, 0) 과 직선 l_1 사이의 거리는

$$\frac{|-4+0-2|}{\sqrt{1+4}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

14. 다음 두 직선 $3x+4y=21$, $3x+4y=11$ 사이의 거리를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선과의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=21$ 의 점$(7,0)$

$$\Rightarrow \quad \frac{|7\times 3+0\times 4-11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$$

15. 세 꼭지점이 $A(1,\ 2)$, $B(-1,\ 2)$, $C(-2,\ 0)$ 로 주어지는 삼각형 ABC 의 넓이는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

점 $A\ (1\ ,2\ )$ 에서 직선 BC 에 이르는 거리를 구하여 높이로 하고, $\overline{BC}$ 의 길이를 밑변의 길이로 하여 삼각형 의 넓이를 구한다. 직선 BC 의
방정식은 $2x - y + 4 = 0$ 이므로,
점 $A\ (1\ ,2\ )$ 에서 직선 BC 에 이르는 거리는
$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.
변 BC 의 길이 : $\sqrt{5}$

$\therefore\ \triangle ABC = \sqrt{5} \times \dfrac{4\sqrt{5}}{5} \times \dfrac{1}{2} = 2$

$\therefore\ \triangle ABC = 2$

해설

세꼭지점이 주어질 때 넓이는

$S = \dfrac{1}{2}|(1 \times 2) + (-1 \times 0) + (-2 \times 2) -$
$(-1 \times 2) + (-2 \times 2) + (1 \times 0)| = 2$

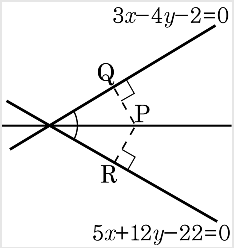
16. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

17. 점 $A(6,\ 2)$와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{AP}$를 $1:3$으로 내분하는 점의 자취는?

① $x-2y-8=0$　② $x+2y-8=0$　③ $x-2y+8=0$

④ $x+2y+8=0$　⑤ $x-2y=0$

해설

$P\ (a,\ b)$라 하면 $a+2b-2=0\ \cdots$ ㉠

$\overline{AP}$의 $1:3$ 내분점을 $Q\ (x,\ y)$라 하면

$$Q(x,\ y)=\left(\frac{a+18}{1+3},\frac{b+6}{1+3}\right)$$

$$x=\frac{a+18}{1+3}\ ,\ y=\frac{b+6}{1+3}$$

$a=4x-18\ ,\ b=4y-6$

㉠에 대입하면,

$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$

18. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{A}(-2, 3)$과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x+2y-3=0$ ② $2x+3y+1=0$

③ $4x-3y+1=0$ ④ $x-4y-3=0$

⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 $\mathrm{A}(-2, 3)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$의 중점의 좌표를

$\mathrm{P}(X,\ Y)$ 라 하면,

$\mathrm{P}(X,\ Y)=\mathrm{P}\left(\frac{x-2}{2},\ \frac{y+3}{2}\right)$ 이므로

$X=\frac{x-2}{2}$, $Y=\frac{y+3}{2}$

$\therefore\ x=2X+2$, $y=2Y-3$

이것을 $2x+y-4=0$ 에 대입하면

$2(2X+2)+(2Y-3)-4=0$

$4X+2Y-3=0$

$\therefore\ 4x+2y-3=0$

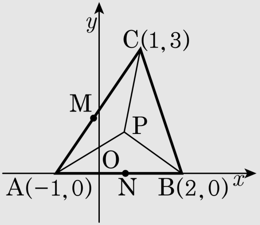
19. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1,0)$, $B(2,0)$, $C(1,3)$이 있다. $\triangle ABC$의 내부의 점 P가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P가 그리는 도형의 길이는?

① $\frac{\sqrt{10}}{2}$　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $\sqrt{10}$　⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P가 $\triangle ABC$의 내부의 점이고

$\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$\therefore\ \triangle BPC = \frac{1}{2}\triangle ABC$

점 P는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M, N 을 잇는 선분 위에 있다.

그런데 $M\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

점 P의 자취 $\overline{MN} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

20. 두 점 A$(0,\ 0)$, B$(3,\ 3)$에 대하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{BP}}} \geq 2$가 되도록 점 P가 움직일 때, 점 P가 그리는 자취의 넓이는?

① 8π　② $2\sqrt{2}\pi$　③ 4π　④ $4\sqrt{2}\pi$　⑤ 16π

해설

점 P를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}} \geq 2\overline{\mathrm{BP}}$ 이므로

$\sqrt{x^2+y^2} \geq 2\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$

양변을 제곱하면 $x^2+y^2 \geq 4(x-3)^2+4(y-3)^2$

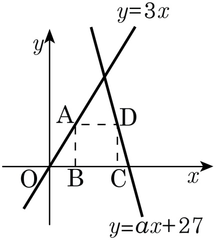
$\therefore\ x^2-8x+y^2-8y+24 \leq 0$

즉, $(x-4)^2+(y-4)^2 \leq 8$

따라서 구하는 자취는 중심이 $(4,\ 4)$ 이고, 반지름이 $2\sqrt{2}$ 인 원의 내부이다.

그러므로 구하는 넓이는 8π이다.

21. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD가 있다. 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프가 점 A 를 지나고, 일차함수 $y = ax + 27$ 의 그래프가 점 D를 지날 때, 기울기 a 의 값은? (단, 두 점 B, C는 x축 위의 점이다.)



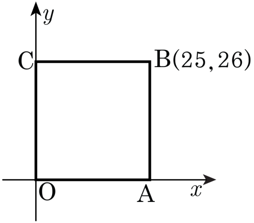
① -4 ② $-\frac{9}{2}$ ③ -5

④ $-\frac{11}{2}$ ⑤ -6

해설

$\overline{AB} = 3$ 이므로 점 A 의 y 좌표는 3 이고,
점 A는 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프 위의 점이므로 x 좌표가 1 이다.
점 A와 x 좌표가 같은 점 B의 좌표는 $(1,\ 0)$ 이고, $\overline{BC} = 3$ 이므로 점 C의 좌표는 $(4,\ 0)$ 이다.
점 C 와 x 좌표가 같고, 점 A 와 y 좌표가 같은 점 D 의 좌표는 $(4,\ 3)$ 이다.
점 D가 일차함수 $y = ax + 27$ 위의 점이므로 $x = 4$, $y = 3$를 대입하면 $3 = a \times 4 + 27$
$\therefore\ a = -6$

22. 좌표평면 위에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 한다. 직선 $y=\frac{3}{8}x+1$은 아래 그림과 같은 직사각형 OABC 내부(경계선 제외)의 격자점을 모두 몇 개 지나는가?



① 1개　　② 2개　　③ 3개　　④ 4개　　⑤ 5개

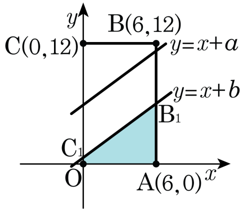
해설

$y=\frac{3}{8}x+1$에서 x가 8의 배수이면 y도 정수가 된다.

$0<x<25,\ 0<y<26$에서 조건을 만족하는 정수의 순서쌍을 구하면

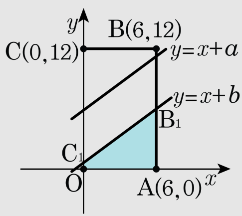
$(8,\ 4),\ (16,\ 7),\ (24,\ 10)$으로 모두 3개의 격자점을 지난다.

23. 네 점 O(0,0), A(6,0), B(6,12), C(0,12)를 꼭지점으로 하는 사각형 OABC가 있다. 그림과 같이 두 직선 $y=x+a$, $y=x+b$가 사각형 OABC의 넓이를 삼등분할 때, ab의 값은?



① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설



사각형 OABC의 넓이가 72이므로
사각형 OAB_1C_1의 넓이는 24이다.

$\frac{1}{2}(b+6+b)\times 6=24$이므로 $b=1$

같은 방법으로 $a=5$

$\therefore\ ab=5$

24. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의조건은?

$$3x+y+2=0,\ \ x+3y+k=0,\ \ 2x-y+3=0$$

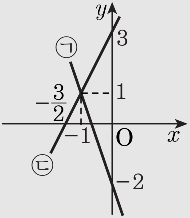
① $k \neq -2$ ② $k \neq -3$ ③ $k \neq -4$

④ $k \neq -7$ ⑤ $k \neq -11$

해설

$3x+y+2=0 \cdots$ ㉠
$x+3y+k=0 \cdots$ ㉡ 일 때,
$2x-y+3=0 \cdots$ ㉢

다음 그림과 같이
세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.



㉠, ㉡, ㉢ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.
㉠과 ㉢을 연립하여 교점의 좌표를 구하면$(-1,\ 1)$ 이다.
이 점을 ㉡에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1+3+k \neq 0$, $\therefore\ k \neq -2$

25. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 원점에서부터의 거리가 1 인 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2　　② -1 또는 2　　③ 4

④ -2 또는 4　　⑤ 0 또는 4

해설

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$
의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x-2y+3+k(x-y+1)=0$ 으로
나타낼 수 있다. 이 식을 정리하면
$(1+k)x+(-2-k)y+(3+k)=0 \cdots ①$
원점에서 이 직선까지의 거리가 1 이므로

$$\frac{3+k}{\sqrt{(1+k)^2+(-2-k)^2}}=1$$

양변에 제곱하여 정리하면
$(3+k)^2=(1+k)^2+(-2-k)^2$, $k^2=4$
$\therefore k=\pm 2$
이것을 ①에 대입하여 정리하면
$3x-4y+5=0$ 또는 $x-1=0$
따라서 $a+b+c$ 는 0 또는 4