

1. 직선 $y = -3x + 2$ 을 다음과 같이 대칭 이동 할 때, 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ (x 축) : $y = 3x - 2$

㉡ (y 축) : $y = -3x - 2$

㉢ (원점) : $y = 3x + 2$

㉣ ($y = x$) : $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

㉤ ($y = -x$) : $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

해설

㉠ x 축 : $y = -3x + 2 \rightarrow (-y) = -3x + 2$

$\rightarrow y = 3x - 2$ (O)

㉡ y 축 : $y = -3x + 2 \rightarrow y = -3(-x) + 2$

$\rightarrow y = 3x + 2$ (X)

㉢ 원점 : $y = -3x + 2 \rightarrow (-y) = -3(-x) + 2$

$\rightarrow y = -3x - 2$ (X)

㉣ $y = x$: $y = -3x + 2 \rightarrow x = -3y + 2$

$\rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ (O)

㉤ $y = -x$: $y = -3x + 2 \rightarrow (-x) = -3(-y) + 2$

$\rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ (X)

2. 직선 $3x - 2y + 4 = 0$ 을 점 $(3, 1)$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $ax + by + 18 = 0$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

직선 $3x - 2y + 4 = 0$ 을 주어진 조건대로 대칭이동하면

$$3(6 - x) - 2(2 - y) + 4 = 0$$

$$-3x + 2y + 18 = 0$$

따라서, $a = -3$, $b = 2$

$$\therefore a + b = -1$$

3. 원 $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시킨 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하면?

- ① $(-1, -1)$, $2\sqrt{3}$ ② $(0, 0)$, $3\sqrt{3}$ ③ $(1, 1)$, $4\sqrt{3}$
④ $(2, 2)$, $5\sqrt{3}$ ⑤ $(3, 3)$, $6\sqrt{3}$

해설

$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$
 $(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 12$
 $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 12$
이 원의 중심의 좌표는 $(-3, 2)$ 이고
반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다.
따라서, 이 원을 x 축의 방향으로 2 만큼,
 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시켰을 때,
중심의 좌표는 $(-3 + 2, 2 - 3) = (-1, -1)$ 이고,
반지름의 길이는 변하지 않으므로 $2\sqrt{3}$ 이다.

4. 점 $(3, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 다음 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(-5, -2)$

② $(-2, 4)$

③ $(-1, 3)$

④ $(0, 1)$

⑤ $(4, 7)$

해설

점 $(3, 1) \xrightarrow[\text{대칭이동}]{x\text{축에 대하여}} \text{점 } (3, -1) \xrightarrow[\text{대칭이동}]{\text{직선 } y=x\text{에 대하여}} \text{점 } (-1, 3)$

5. 원 $(x-3)^2 + y^2 = 4$ 를 $y = x$ 에 대해 대칭이동한 원의 중심이 직선 $y = 2x + k$ 위에 있을 때, k 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

중심 $(3, 0)$ 을 $y = x$ 에 대칭이동 시키면

$(0, 3)$ 이 된다

$\therefore 3 = 2 \times 0 + k$

$\therefore k = 3$

6. 두 포물선 $y = x^2 - 6x + 10$ 과 $y = -x^2 + 2x - 5$ 가 점 P 에 대하여 대칭일 때, 점 P 의 좌표는?

- ① $\left(5, \frac{3}{2}\right)$ ② $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ ③ $(0, 2)$
④ $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ ⑤ $(2, 5)$

해설

$$y = x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$y = -x^2 + 2x - 5 = -(x - 1)^2 - 4 \cdots \textcircled{2}$$

포물선 ①, ②의 꼭짓점의 좌표는

각각 $(3, 1)$, $(1, -4)$ 이고

두 포물선이 점 P 에 대하여 대칭이므로

점 P 는 두 포물선의 꼭짓점의 중점이다.

$$\frac{3+1}{2} = 2, \quad \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}$$

따라서, 점 P 는 $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ 이다.

7. 포물선 $y = x^2$ 을 점 P 에 대하여 대칭이동 시켰더니 포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 가 되었다. 이 때 점 P 의 좌표는?

㉠ (1, 1)

㉡ (1, 2)

㉢ (-1, 1)

㉣ (-1, -1)

㉤ (1, -1)

해설

두 포물선이 한 점에 대하여 서로 대칭이면

두 포물선의 꼭지점도 이 점에 대하여 서로 대칭이다.

포물선 $y = x^2$ 의 꼭지점의 좌표는 O(0, 0) 이고

포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 의 꼭지점의 좌표는 A(2, 2) 이다.

이 때, 점 P 는 선분 OA 의 중점이므로 P 의 좌표는 P(1, 1) 이다.

8. 점 A 를 직선 $l : y = 2x + 3$ 에 대하여 대칭이동을 한 점을 점 B 라고 할 때, 다음 설명 중 틀린 것은?
- ① 점 A 와 점 B 의 중점은 직선 l 을 지난다.
 - ② $\overline{AB}$ 와 직선 l 은 직교한다.
 - ③ 점 A 를 지나는 임의의 직선 m 을 l 에 대하여 대칭이동을 하여 생기는 직선은 반드시 점 B 를 지난다.
 - ④ 점 A 를 지나는 직선 m 을 직선 l 에 대칭이동을 하여 생긴 직선을 m' 라고 할 때, m 과 m' 의 기울기가 같은 직선 m 은 오직 하나 뿐이다.
 - ⑤ 점 B 를 직선 l 에 대하여 대칭이동을 한 점은 A 이다.

해설

점 A 를 지나는 직선 m 을 직선 l 에 대칭이동을 하여 생긴 직선을 m' 라고 할 때, m 과 m' 의 기울기가 같은 직선 m 은 직선 l 과 평행한 경우와 수직인 경우 2 가지이다.

9. 원 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 을 직선 $y = -x + 1$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설

원 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 을 직선 $y = -x + 1$ 에 대하여 대칭이동한 도형은 반지름의 길이가 1 인 원이다.

이때, 옮기기 전의 원의 중심을 $A(-1, -1)$, 옮긴 후의 원의 중심을 $B(m, n)$ 이라고 하면

선분 AB 는 직선 $y = -x + 1$ 과 수직이므로

$$\frac{n+1}{m+1} \cdot (-1) = -1 \text{ 에서}$$

$$m = n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, 선분 AB 의 중점 $\left(\frac{m-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$ 은

직선 $y = -x + 1$ 위에 있으므로

$$\frac{n-1}{2} = -\frac{m-1}{2} + 1 \text{ 에서}$$

$$m + n = 4 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$m = 2, n = 2$$

따라서, 대칭이동하여 옮겨진 원은 중심이 (2, 2)

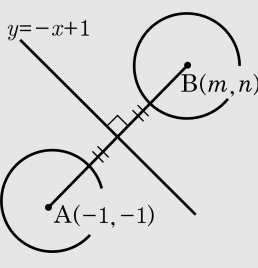
이고 반지름의 길이가 1 이므로 그 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$\text{즉, } x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$$

$$\therefore a = -4, b = -4, c = 7$$

$$\therefore a + b + c = -1$$



10. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 직선 $y = -x + 2$ 에 관하여 대칭이동한 식에서 중심의 좌표는?

① (1, 1) ② (1, 2) ③ (2, 1) ④ (2, 2) ⑤ (2, 3)

해설

원 중심 $O(0, 0)$ 을 $y = -x + 2$ 에 대해 대칭이동 하면 된다. 대칭 이동점을 $O'(a, b)$ 라 하면, $\overline{OO'}$ 은 $y = -x + 2$ 에 수직하고, $\overline{OO'}$ 의 중점은 $y = -x + 2$ 위에 있다.

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = 1 \quad \cdots \textcircled{1},$$

$$\frac{b}{2} = -\frac{a}{2} + 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하면, $a = 2, b = 2$

$\therefore$ 중심좌표 : (2, 2)

11. 원 $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 1$ 를 직선 $y = mx + n$ 에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 이 된다. 이때, $m + n + r$ 의 값을 구하면? (단, $r > 0$)

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

직선에 대한 대칭이동은 중점 조건과 수직 조건을 이용한다.
두 원 $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 1$, $x^2 + y^2 = r^2$ 의 중심이 각각 $(-2, 4)$, $(0, 0)$ 이므로 두 점을 이은 선분의 중점 $(-1, 2)$ 가
직선 $y = mx + n$ 위의 점인 조건에서
 $2 = -m + n \cdots \cdots \textcircled{1}$
또, 두 점 $(-2, 4)$, $(0, 0)$ 을 지나는 직선과 직선 $y = mx + n$ 이 수직인 조건에서
 $\frac{-4}{2} \times m = -1$
 $\therefore m = \frac{1}{2}$
 $m = \frac{1}{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $n = \frac{5}{2}$
 $\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
원을 대칭이동할 때 원의 중심은 이동하지만
원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 $r = 1$
따라서 $m + n + r = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} + 1 = 4$

12. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$ ② $x^2 + y^2 = 1$
③ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ④ $x^2 + y^2 = 4$
⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{2}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면

반지름의 길이가 같아야 한다.

$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 에서 $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은

반지름의 길이가 2인 ④이다.

13. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ ㉡ $x^2 + y^2 = 1$
③ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ④ $(x + 1)^2 + y^2 = 2$
⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면

반지름의 길이가 같아야 한다.

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 에서 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은

반지름의 길이가 1인 ㉡이다.

14. 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$ 가 다음과 같은 규칙에 따라 이동하거나 이동하지 않는다. P 가 점 $A(6, 5)$ 에서 출발하여 어떤 점 B 에서 더 이상 이동하지 않게 되었다. A 에서 B 에 이르기까지 이동한 횟수는?

- ㉠ $y = 2x$ 이면 이동하지 않는다.

㉡ $y < 2x$ 이면 x 축 방향으로 -1 만큼 이동한다.

㉢ $y > 2x$ 이면 y 축 방향으로 -1 만큼 이동한다.

① 4회 ② 5회 ③ 6회 ④ 7회 ⑤ 8회

해설

$(6, 5) \rightarrow (5, 5) \rightarrow (4, 5) \rightarrow (3, 5) \rightarrow (2, 5) \rightarrow (2, 4)$
 $\therefore 5$ 회 이동한다.

15. 점 $(1, 2)$ 를 점 (a, b) 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-1=0$ 은 직선 $x+2y-4=0$ 으로 이동하였다. 이때, $a+2b$ 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동했다고 하면,
 $(x-m)+2(y-n)-1=0$, $x+2y-m-2n-1=0$ 을
 $x+2y-4=0$ 과 비교해 보면,
 $-m-2n=-3 \cdots \textcircled{1}$
점 $(1, 2)$ 를 x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동 시키면,
 $(1+m, 2+n)$
 $\Rightarrow 1+m=a, 2+n=b$
 $\Rightarrow a+2b=m+1+4+2n=8$
($\because \textcircled{1}$ 에서 $m+2n=3$)

16. 점 $(5, 3)$ 을 지나는 직선을 y 축 방향으로 1 만큼 평행이동 시킨 후, 다시 원점에 대하여 대칭이동시켰을 때, 이동된 직선이 점 $(-10, -5)$ 를 지난다고 한다. 이 때, 이동되기 전의 직선의 방정식은?

- ① $y = 2x + \frac{1}{2}$ ② $y = \frac{1}{5}x + 2$ ③ $y = \frac{1}{3}x - 2$
④ $y = 4x + 1$ ⑤ $y = \frac{2}{5}x - 3$

해설

구하는 직선의 기울기를 m 이라 하면

$$y - 3 = m(x - 5)$$

$$y = mx - 5m + 3 \cdots \textcircled{㉠}$$

①을 y 축 방향으로 1 만큼 평행이동시키면

$$y - 1 = mx - 5m + 3$$

$$\therefore y = mx - 5m + 4 \cdots \textcircled{㉡}$$

②를 다시 원점에 대하여 대칭이동시키면

$$-y = -mx - 5m + 4$$

$$\therefore y = mx + 5m - 4 \cdots \textcircled{㉢}$$

③의 그래프가 점 $(-10, -5)$ 를 지나므로

$$-5 = -10m + 5m - 4 \therefore m = \frac{1}{5}$$

따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = \frac{1}{5}x + 2$

17. 대칭이동에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

- I. 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동시킨 도형의 방정식은 $f(-x, -y) = 0$ 이다.
- II. 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동시킨 도형의 방정식은 $f(x - 2a, y) = 0$ 이다.
- III. 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축에 대하여 대칭이동시킨 도형은 원점에 대하여 대칭이동시킨 도형과 일치한다.
- IV. 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동시킨 도형은 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동시킨 도형과 일치한다.

- ①

I, III, IV
- ②

I, IV
- ③

II, III, IV
- ④

III, IV
- ⑤

I, II, III, IV

해설

- I. $f(x, y) = 0$ 을 원점에 대하여 대칭이동
 $\Rightarrow f(-x, -y) = 0$
- II. $f(x, y) = 0$ 을 $x = a$ 에 대하여 대칭이동
 $\Rightarrow f(2a - x, y) = 0$
- III. $f(x, y) = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동
 $\Rightarrow f(x, -y) = 0$
 $f(x, -y) = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동
 $\Rightarrow f(-x, -y) = 0$
 $f(x, y) = 0$ 을 원점에 대하여 대칭이동
 $\Rightarrow f(-x, -y) = 0$
- IV. $f(x, y) = 0$ 을 원점에 대하여 대칭이동
 $\Rightarrow f(-x, -y) = 0$
 $f(x, y) = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동
 $\Rightarrow f(-y, -x) = 0$
 $f(x, y) = 0$ 을 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동
 $\Rightarrow f(-y, -x) = 0$
- 이로부터 옳은 것은 I, III, IV이다.

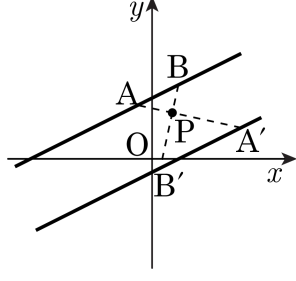
18. 직선 $y = kx + 1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ 의 넓이를 이등분한다고 할 때 k 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

먼저 $y = kx + 1$ 를 x 축 대칭시킨 직선은
 $y = -kx - 1 \cdots \textcircled{1}$
이제 원의 방정식을 정리하면,
 $(x + 3) + (y - 2)^2 = 4$
직선이 원의 넓이를
이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
중심이 $(-3, 2)$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에 대입하면,
 $2 = 3k - 1 \Rightarrow k = 1$

19. 좌표평면 위의 점 P에 대한 두 점 A, B의 대칭점은 각각 A', B'이고, 직선 AB의 방정식은 $x - 2y + 4 = 0$ 이라 한다. 점 A'의 좌표가 (3, 1), 직선 A'B'의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?



- ① $-\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

두 점 A', B'은 점 P에 대한 두 점 A, B의 대칭점이므로, 직선 A'B'은 직선 AB의 점대칭도형이다

$\triangle APB \equiv \triangle A'PB'$ 에서

$\angle ABP = \angle A'B'P$ (엇각)이므로

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ 이다.

따라서 직선 A'B'의 기울기는 직선 AB의 기울기인 $\frac{1}{2}$ 과 같다.

또한, 직선 A'B'은 A'(3, 1)을 지나므로

직선 A'B'의 방정식은

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 3)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

따라서 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ 이다.

$$\therefore ab = -\frac{1}{4}$$

20. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0$ 을 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2 + y^2 - c = 0$ 이 된다고 한다. 이 때, $a + b + c$ 의 값은?

① -18 ② -16 ③ 0 ④ 22 ⑤ 23

해설

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 20$$

즉, (2, 4) 를 $y = ax + b$ 에 대칭이동하면 (0, 0)

1) (2, 4) 와 (0, 0) 의 중점은 $y = ax + b$ 를 지난다. $\Rightarrow 2 = a + b$

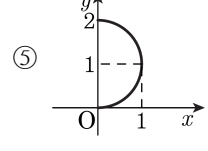
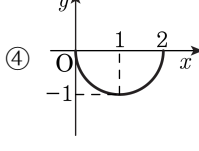
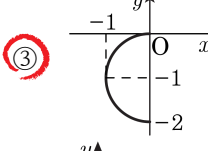
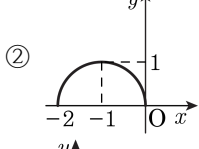
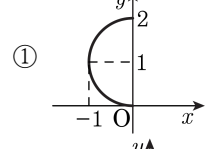
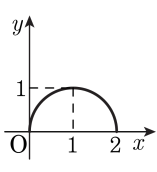
2) (2, 4), (0, 0) 을 잇는 선분은 $y = ax + b$ 에 수직이다.

$$\Rightarrow 2 = -\frac{1}{a}, a = -\frac{1}{2}$$

1), 2) 에 의해 $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{5}{2}, c = 20,$

$$a + b + c = 22$$

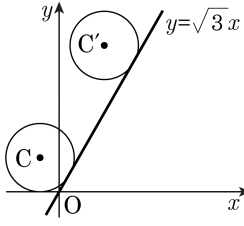
21. 도형 $f(x, y) = 0$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때,
도형 $f(-y, -x) = 0$ 의 그래프로 옳은 것은?



해설

도형 $f(-y, -x) = 0$ 의 그래프는
도형 $f(x, y) = 0$ 의 그래프를
직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동 한 것이다.

22. 다음 그림과 같이 직선 $y = \sqrt{3}x$ 와 x 축에 접하는 반지름의 길이가 1인 $C : (x + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (y - 1)^2 = 1$ 이 있다. 이것을 직선 $y = \sqrt{3}x$ 위로 두 바퀴 굴려 원 C' 의 방정식이 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$ 이 된다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하면?



- ① $\frac{3 + \sqrt{2}}{3} + (2\sqrt{2} + 1)\pi$

② $\frac{3 - \sqrt{2}}{3} + (2\sqrt{2} - 1)\pi$
- ③ $\frac{3 + \sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3} + 1)\pi$

④ $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3} + 2)\pi$
- ⑤ $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3} + 1)\pi$

해설

i) 원 C 와 원 C' 의 중심을 지나는 직선의 기울기는 $\sqrt{3}$ 이므로 $\frac{b - 1}{a + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$ 에서 $b = \sqrt{3}a + 2$

ii) 원이 두 바퀴 굴러 갔으므로 원 중심 사이의 거리는 4π 이다.

$$\Rightarrow (a + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (b - 1)^2 = 16\pi^2$$

i) 을 ii) 에 대입하여 정리하면,

$$4a^2 + \frac{8}{3}\sqrt{3}a + \frac{4}{3} = 16\pi^2$$

$$3a^2 + 2\sqrt{3}a + 1 = 12\pi^2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}a + 1)^2 = (2\sqrt{3}\pi)^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}\pi - 1}{\sqrt{3}} \quad (\because a > 0)$$

$$\Rightarrow b = 2\sqrt{3}\pi + 1$$

$$\therefore a + b = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3} + 2)\pi$$

23. 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 위의 점 $P(a, b)$ 를 x 축, y 축에 대하여 각각 대칭이동한 점들 P_1, P_2 라 하자. $\triangle PP_1P_2$ 의 넓이가 4 일 때, 두 양수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

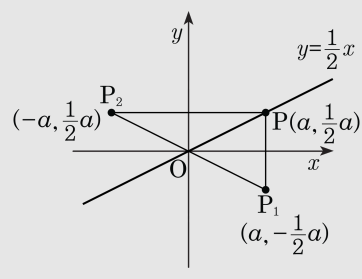
② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설



점 $P(a, b)$ 가 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 위의 점이므로 $P\left(a, \frac{1}{2}a\right)$, x 축 대칭

$$: P_1\left(a, -\frac{1}{2}a\right), y\text{축 대칭} : P_2\left(-a, \frac{1}{2}a\right)$$

$\triangle PP_1P_2$ 는 $\angle P_1PP_2 = 90^\circ$ 인 직각삼각형으로 넓이는 $\overline{PP_1} \times \overline{PP_2} \times \frac{1}{2}$ 이다.

$$\overline{PP_1} = a, \overline{PP_2} = 2a$$

$$\therefore a \times 2a \times \frac{1}{2} = 4$$

$$a = \pm 2$$

$$a > 0 \Rightarrow \text{므로 } a = 2, b = \frac{1}{2}a = 1$$

$$\therefore a + b = 3$$

24. 포물선 $y = x^2 + 3x - 9$ 위의 서로 다른 두 점 A, B 가 직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭일 때, 두 점 A, B 사이의 거리는?

- ① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

해설

A 의 좌표를 (a, b) 라 두면

B의 좌표는 (b, a) 가 된다.

두 점은 포물선 위의 점이므로

$a = b^2 + 3b - 9$, $b = a^2 + 3a - 9$ 가

성립한다.

두 식을 변변 빼서 정리하면

$$(a - b)(a + b + 4) = 0$$

$$\therefore a + b + 4 = 0 \quad (\because a \neq b)$$

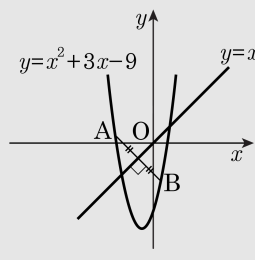
$b = -a - 4$ 를 $b = a^2 + 3a - 9$ 에 대입하면

$$a^2 + 4a - 5 = 0, (a + 5)(a - 1) = 0$$

$a = 1$ 또는 -5 , $b = -5$ 또는 1 이므로

A($-5, 1$), B($1, -5$) 가 된다.

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$



25. 두 변환 f, g 가 다음과 같이 주어졌을 때, $(g \circ f)(-2, 3)$ 을 구하면?

$f : (x, y) \rightarrow (x - 1, y + 1)$
 $g : (x, y)$ 를 원점을 중심으로 하여
반시계방향으로 90° 회전시킨다.

- ① $(4, 3)$

② $(3, -4)$

③ $(-4, -3)$

④ $(-4, -1)$

⑤ $(4, -3)$

해설

합성변환의 정의에 의해 $(g \circ f)(-2, 3)$ 을 풀면

$(g \circ f)(-2, 3) = g(f(-2, 3)) = g(-3, 4)$

주어진 정의에 의해 $g(-3, 4)$ 는 점

$(-3, 4)$ 를 원점을 중심으로 하여 반시

계방향으로 회전시킨 것이므로

그림에서와 같이 $P(-3, 4)$ 에 대해 회전

이동된 점 $P'(a, b)$ 를 정하면

$\overline{OP} = \overline{OP'}$ (회전축) ①

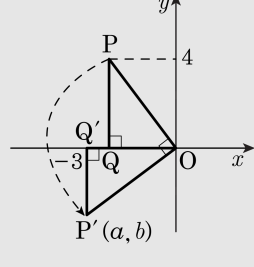
$\angle POQ = \angle OP'Q'$ ②

$\angle OQP = \angle OQ'P'$ ③

①, ②, ③에 의해 $\angle OPQ \equiv \angle P'OQ'$

따라서, 대응변으로 $\overline{OP} = \overline{P'Q'}$ 이고 $\overline{PQ} = \overline{OQ'}$ 다.

이를 제사분면의 좌표로 나타내면 $P(-4, -3)$



26. 두 직선 $y = 2x$, $y = ax + b$ ($a < 0, b > 0$) 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 옮겨진 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 가 되었다. 이때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 직선의 방정식 $y = 2x$, $y = ax + b$ 를
연립하여 풀면 $2x = ax + b$, $(a - 2)x = -b$

$$\therefore x = -\frac{b}{a-2} \quad (\because a \neq 2)$$

$$\text{이것을 } y = 2x \text{ 에 대입하면 } y = -\frac{2b}{a-2}$$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는

$$\left(-\frac{b}{a-2}, -\frac{2b}{a-2}\right)$$

따라서, 두 직선 $y = 2x$, $y = ax + b$ 및 y 축으로
둘러싸인 삼각형의 세 꼭지점의 좌표는

$$(0, 0), (0, b), \left(-\frac{b}{a-2}, -\frac{2b}{a-2}\right) \text{ 이므로}$$

이 삼각형의 무게중심을 G 라고 하면

$$G\left(\frac{-\frac{b}{a-2}}{3}, \frac{b - \frac{2b}{a-2}}{3}\right)$$

이때, 점 G 와 대칭이동한 후의

$$\text{삼각형의 무게 중심 } \left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ 는}$$

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\left(\frac{-\frac{b}{a-2}}{3}, \frac{b - \frac{2b}{a-2}}{3}\right) \text{ 는 } \left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right) \text{ 과 같다.}$$

$$\therefore -\frac{b}{a-2} = 2 \dots\dots\textcircled{㉠}$$

$$b - \frac{2b}{a-2} = 10 \dots\dots\textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$b - 2 \cdot (-2) = 10$$

$$\therefore b = 6$$

이것을 ㉠에 대입하면 $a = -1$

$$\therefore a + b = 5$$

27. 직선 $y = 0$ 을 직선 $y = mx$ 에 대하여 대칭이동시킨 직선과 $x - y + 2 = 0$ 과의 교점을 P 라 할 때 $\overline{OP}$ 의 최솟값은? (단, O 는 원점이다.)

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

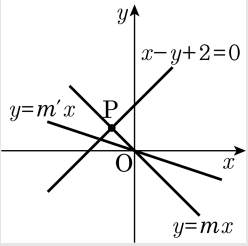
해설

직선 $y = 0$ 을 직선 $y = mx$ 에 대하여 대칭 이동시킨 직선을 $y = m'x$ 이라 할 때

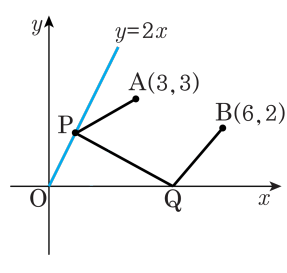
$y = m'x$ 와 $x - y + 2 = 0$ 의 교점을 P 라 하면

$\overline{OP}$ 의 최솟값은 원점에서 직선 $x - y + 2 = 0$ 에 이르는 거리와 같다.

따라서 $\overline{OP}$ 의 최솟값은 $\frac{|2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$ 이다.



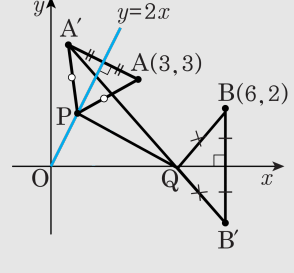
28. 좌표평면 위에 두 점 A (3, 3), B (6, 2) 와 직선 $y = 2x$ 위를 움직이는 점 P , x 축 위를 움직이는 점 Q 가 있다. 이때, $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은?



- ① $\frac{11\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{11\sqrt{10}}{5}$
 ③ $\frac{13\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{13\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

다음 그림과 같이 점 A (3, 3) 을 직선 $y = 2x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하고 점 B 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라고 하면



$\overline{AP} = \overline{A'P}, \overline{BQ} = \overline{B'Q}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \geq \overline{A'B'}$
 따라서, 구하는 최솟값은 선분 A'B' 의 길이이다.
 이때, 점 A' (a, b) 라고 하면
 직선 AA' 과 직선 $y = 2x$ 가 수직이므로
 $\frac{b-3}{a-3} \cdot 2 = -1$
 $\therefore a + 2b = 9 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$

또한, 선분 AA' 의 중점 $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$ 은 직선 $y = 2x$ 위에 있으므로
 $\frac{b+3}{2} = 2 \cdot \frac{a+3}{2}$
 $\therefore 2a - b = -3 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $a = \frac{3}{5}, b = \frac{21}{5}$
 $\therefore A' \left(\frac{3}{5}, \frac{21}{5}\right)$
 한편, 점 B' (6, -2) 이므로

$$\begin{aligned} \overline{A'B'} &= \sqrt{\left(6 - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(-2 - \frac{21}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{27}{5}\right)^2 + \left(-\frac{31}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1690}{25}} = \frac{13\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

따라서, 구하는 최솟값은 $\frac{13\sqrt{10}}{5}$ 이다.