1. $(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$ 가 순허수일 때, x 의 값은?

① 0　　② 1　　③ -3　　④ 1, 3　　⑤ -1

해설

$(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$
$=x^2+x^2i+2x+4xi-3+3i$
$=(x^2+2x-3)+(x^2+4x+3)i$
순허수를 만족하려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$이어야 한다.
$x^2+2x-3=0$이면서, $x^2+4x+3\neq 0$인 x값을 찾아야 한다.
$\therefore x=1$

2. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$

$=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$

순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분)$\neq 0$이어야 하므로

$x^2-x-2=0$, $x^2-3x+2\neq 0$

(i) $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $x^2-3x+2\neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2)\neq 0$

$\therefore\ x\neq 1$ 또는 $x\neq 2$

따라서 (i), (ii) 에 의하여 $x=-1$

3. $i-2i^2+3i^3-4i^4+5i^5-6i^6+\cdots-100i^{100}=a+bi$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① -100　② -50　③ 0　④ 25　⑤ 50

해설

준식$= i+2-3i-4+5i+6-7i-8+\cdots$
$=\left\{(1+5+9+\cdots+97)-(3+7+\cdots+99)\right\}i$
$\quad+\left\{(2+6+\cdots+98)-(4+8+\cdots+100)\right\}$
$=(1225-1275)i+(1250-1300)=-50-50i$ 따라서 $a=-50$, $b=-50$ 이므로 $a+b=-100$

4. n 이 자연수일 때, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^n = 0$ 을 만족하는 n 의 최솟값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$n = 1$ 일 때,

$$\frac{\sqrt{2}}{1+i} + \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}(1-i) + \sqrt{2}(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$n = 2$ 일 때, $\dfrac{2}{(1+i)^2} + \dfrac{2}{(1-i)^2} = \dfrac{2}{2i} + \dfrac{2}{-2i} = 0$

그러므로 최솟값 $n = 2$

5. $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ 일 때, $z^{100}=(a+bi)z$를 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하면?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ 1

해설

$z^2=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i$ 이므로

$z^{100}=(z^2)^{50}=i^{50}=(i^4)^{12}\cdot i^2=-1$

$$\therefore\ -1=(a+bi)\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)+\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)i$$

따라서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(a-b)=-1$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(a+b)=0$

$\therefore\ a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ ab=-\dfrac{1}{2}$

6. $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{2005}=x+yi$일 때, $x+y$의 값은? (단, x, y 는 실수 $i=\sqrt{-1}$)

① 1　② 2　③ 0　④ -1　⑤ -2

해설

$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{2005}$
$=1+i-1-i+\cdots+i$
$=1+i$
$x=1,\ y=1,\ x+y=2$

7. 복소수 전체의 집합에서 두 복소수 α, β 에 대하여 연산 $\circledcirc$을 $\alpha \circledcirc \beta = (\alpha + i)(\beta + i)$ 로 정의할 때, 등식 $(2+i) \circledcirc z = 1$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $-\frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$　　② $-i$　　③ i

④ $1+i$　　⑤ $\frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$

해설

$$\begin{aligned}(2+i) \circledcirc z &= \left\{(2+i)+i\right\}(z+i) \\ &= (2+2i)(z+i) = 1\end{aligned}$$

$z + i = \frac{1}{2+2i}$ 이므로

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2+2i} - i \\ &= \frac{(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} - i \\ &= \frac{2-2i-8i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}i \end{aligned}$$

8. 등식 $x(3+4i)+\overline{y(1+i)} = 5+2i$를 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x(3+4i)+\overline{y(1+i)}$

$= 3x+4xi+y-yi$

$= (3x+y)+(4x-y)i$

$= 5+2i$

$\therefore\ 3x+y=5,\ 4x-y=2$

$x=1,\ y=2$

$\therefore\ x+y=3$

9. 복소수 $\alpha = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 에 대하여 $\alpha^* = b + ai$로 나타낸다. $\alpha = \frac{4+3i}{5}$ 일 때, $5\alpha^5(\alpha^*)^4$ 의 값을 구하면?

① $4+3i$ ② $3+3i$ ③ $2+3i$
④ $1+3i$ ⑤ $-1+3i$

해설

$$\begin{aligned} \alpha\alpha^* &= (a+bi)(b+ai) \\ &= ab + a^2 i + b^2 i - ab = (a^2+b^2)i \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{4+3i}{5}$ 이므로 $\alpha\alpha^* = \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \right\} i = i$

$$\begin{aligned} \therefore\ 5\alpha^5(a^*)^4 &= 5\alpha(\alpha \cdot a^*)^4 \\ &= 5 \cdot \frac{4+3i}{5} \cdot i^4 \\ &= 4+3i \end{aligned}$$

10. 복소수 $z = a + bi$ $(a, b$: 실수$)$에 대하여 $<z>= b + ai$로 나타낸다.
$z = \frac{4+3i}{5}$ 일 때, $5z^5 <z>^4$ 의 값을 구하면?

① $3 + 4i$　　② $4 + 3i$　　③ $5 + 4i$

④ $5 + 3i$　　⑤ $4 + 5i$

해설

$z <z>= (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$

$z = \frac{4+3i}{5}$ 이므로

$z <z>= \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \right\} i = i$

$$\begin{aligned} \therefore\ 5z^5 <z>^4 &= 5z(z <z>)^4 \\ &= 5\left(\frac{4+3i}{5}\right)(i)^4 \\ &= 4+3i \end{aligned}$$