1. 방정식 $x^2+y^2+Ax+By=0$ 이 나타내는 원의 중심이 $(-2,-3)$ 일 때, 상수 A, B 의 값과 반지름의 길이를 바르게 나열한 것은?

① 2, 3, $\sqrt{2}$　　② 3, 7, 5　　③ 4, 4, $\sqrt{9}$

④ 4, 6, $\sqrt{13}$　　⑤ 5, 9, 11

해설

중심이 $(-2,-3)$ 이고 반지름의 길이가
r 인 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y+3)^2=r^2$
$x^2+y^2+4x+6y+13-r^2=0$
이것이 $x^2+y^2+Ax+By=0$ 과 일치해야 하므로
$A=4, B=6, 13-r^2=0$
$13-r^2=0$ 에서
$r=\sqrt{13}$ $(\because r>0)$
따라서, $A=4, B=6$ 이고
반지름의 길이는 $\sqrt{13}$ 이다.

2. 세 점 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$을 지나는 원의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ (단, $r > 0$)라고 할 때, $a + b + r$ 의 값을 구하면?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

구하는 원의 방정식을
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓는다.
세 점 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$은
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
위의 점이므로 등식이 성립한다.
따라서 세 점을 대입한 식을 연립시키면
구하는 원의 방정식은 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 이다.
$x^2 + y^2 - 2x = 0$ 을 정리하면
$(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 이다.
따라서 $a = 1$, $b = 0$, $r = 1$ 이므로
$a + b + r = 2$ 이다.

3. 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 과 중심이 같고 점 $(5,\ -3)$ 을 지나는 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 이라고 할 때, $a+b+r$ 의 값은? (단, a, b, r 은 상수)

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$x^2+y^2-4x-2y+1=0$
$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y-1)^2=4$
$\therefore$ 중심은 $(2,1)$ 이다.
$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y-1)^2=r^2$
$(5,\ -3)$ 을 지나므로 대입하면,
$(5-2)^2+(-3-1)^2=r^2 \quad r=5$
$\therefore \quad a+b+r=2+1+5=8$

4. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$$a = (\qquad), \ k < (\qquad)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

5. a를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + 8a - 15 = 0$의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$(x+a)^2 + (y-a)^2 = 2a^2 - 8a + 15$$
$$= 2(a-2)^2 + 7$$
$$= (\text{반지름})^2$$

따라서 $a = 2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a,\ a) = (-2,\ 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

6. 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

7. 중심이 직선 $3x+y=12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a,b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
중심의 좌표는 $(r,\ r)$ 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식을
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠
한편, 점 $(r,\ r)$ 는 직선 $3x+y=12$ 위에 있으므로 $3r+r=12$
$\therefore\ r=3$
따라서, 구하는 원의 방정식은 ㉠에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$

8. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면
$(x-k)^2 + (y+k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots ㉠$
반지름의 길이가 1 이므로
㉠에서 $-k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$
$k^2 - 4k + 3 = 0, (k-1)(k-3) = 0$
$\therefore k = 1$ 또는 $k = 3$
따라서 합은 4이다.

9. 두 원 $x^2+y^2=2$과 $(x-a)^2+(y-a)^2=2$이 만나지 않을 때, 실수 a의 값의 범위는 $a<p$ 또는 $a>q$이다. 이때, $p+q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

두 원 $x^2+y^2=2$, $(x-a)^2+(y-a)^2=2$는 만나지 않는다.
즉, 두 원이 서로 외부에 있거나 한 원이 다른 원의 내부에 있어야 하는데, 두 원의 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{2}$이므로 한 원이 다른 원의 내부에 있을 수는 없다. 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,\ 0)$, $(a,\ a)$이므로 중심거리는

$\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}|a|$

따라서 두 원이 서로 외부에 있으려면

$\sqrt{2}|a|>\sqrt{2}+\sqrt{2}$, $|a|>2$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>2$

10. 원 $x^2+y^2-4x+6y-1=0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1,\ 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=14$ 이므로
중심은 $(2,\ -3)$ 이다.
구하는 원의 반지름을 r 라 하면
$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$ 이고,
이 원이 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로
$(1-2)^2+(2+3)^2=r^2$
$\therefore r^2=26$

11. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-a)^2+(y-b)^2=4$ 에 대하여 두 원이 외접할 때 a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

외접하기 위한 조건은 $\sqrt{a^2+b^2}=2+1$

$\therefore a^2+b^2=9$

12. 점 $(-4,\ 2)$ 를 지나고 x 축, y 축에 모두 접하는 원은 2 개가 있다. 이때, 두 원 중 큰 원의 넓이는?

① 25π ② 50π ③ 75π ④ 100π ⑤ 125π

해설

제 2 사분면의 점$(-4, 2)$ 를 지나고
x 축, y 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2(r>0)$
$(-4+r)^2+(2-r)^2=r^2$
$16-8r+r^2+4-4r+r^2=r^2,\ (r-2)(r-10)=0$
$\therefore\ r=2$ 또는 $r=10$
따라서 큰 원의 반지름의 길이가 10 이므로
넓이는 $\pi\cdot10^2=100\pi$

13. 두 정점 A$(0, 0)$, B$(0, 3)$ 에서의 거리의 비가 $2 : 1$ 인 점 P(x, y) 의 자취는?

① $x^2 + (y-4)^2 = 4$ ② $x^2 + (y+4)^2 = 4$
③ $(x-4)^2 + y^2 = 4$ ④ $(x+4)^2 + y^2 = 4$
⑤ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$

해설

$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$
즉 $4\overline{PB}^2 = \overline{PA}^2$ 이므로
$4\{x^2 + (y-3)^2\} = x^2 + y^2$
$3x^2 + 3y^2 - 24y + 36 = 0$
$\therefore x^2 + (y-4)^2 = 4$

14. 두 점 $A(3,0)$, $B(-2,0)$ 에서의 거리의 비가 $2:3$ 인 점 P 의 자취의 넓이는?

① 9π ② 16π ③ 25π ④ 36π ⑤ 49π

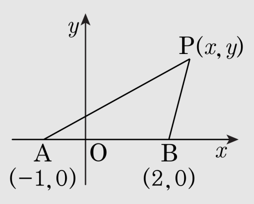
해설

점 P 의 좌표를 $P(x,y)$ 라 하면
$\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$
즉 $4\overline{PB}^2=9\overline{PA}^2$ 이므로
$4\{(x+2)^2+y^2\}=9\{(x-3)^2+y^2\}$
$x^2+y^2-14x+13=0$
$\therefore (x-7)^2+y^2=36$
따라서 점 P는 중심이 $(7,\ 0)$ 이고,
반지름의 길이가 6 인 원 위를 움직이므로
구하는 자취의 넓이는 $\pi\cdot 6^2=36\pi$

15. 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ 4

해설



조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를

P(x, y) 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$\therefore\ 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

그런데 $\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$4\left\{(x-2)^2 + y^2\right\} = \left\{(x+1)^2 + y^2\right\}$

정리하면 $(x-3)^2 + y^2 = 4$

따라서 원의 반지름은 2 이다.