

1. 방정식 $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$ 이 나타내는 원의 중심이 $(-2, -3)$ 일 때, 상수 A, B 의 값과 반지름의 길이를 바르게 나열한 것은?

① 2, 3, $\sqrt{2}$

② 3, 7, 5

③ 4, 4, $\sqrt{9}$

④ 4, 6, $\sqrt{13}$

⑤ 5, 9, 11

해설

중심이 $(-2, -3)$ 이고 반지름의 길이가

r 인 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 - r^2 = 0$$

이것이 $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$ 과 일치해야 하므로

$$A = 4, B = 6, 13 - r^2 = 0$$

$$13 - r^2 = 0 \text{ 에서}$$

$$r = \sqrt{13} \quad (\because r > 0)$$

따라서, $A = 4, B = 6$ 이고

반지름의 길이는 $\sqrt{13}$ 이다.

2. 세 점 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ 을 지나는 원의 방정식이 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (단, $r > 0$)라고 할 때, $a + b + r$ 의 값을 구하면?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

구하는 원의 방정식을

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓는다.

세 점 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ 은

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

위의 점이므로 등식이 성립한다.

따라서 세 점을 대입한 식을 연립시키면

구하는 원의 방정식은 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 이다.

$x^2 + y^2 - 2x = 0$ 을 정리하면

$(x-1)^2 + y^2 = 1$ 이다.

따라서 $a = 1$, $b = 0$, $r = 1$ 이므로

$a + b + r = 2$ 이다.

3. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 과 중심이 같고 점 $(5, -3)$ 을 지나는 원의 방정식을 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 이라고 할 때, $a + b + r$ 의 값은?
(단, a, b, r 은 상수)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

$\therefore$ 중심은 $(2, 1)$ 이다.

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = r^2$$

$(5, -3)$ 을 지나므로 대입하면,

$$(5 - 2)^2 + (-3 - 1)^2 = r^2 \quad r = 5$$

$$\therefore a + b + r = 2 + 1 + 5 = 8$$

4. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$$a = (\quad), k < (\quad)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0 \text{ 에서}$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - k$$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

5. a 를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + 8a - 15 = 0$ 의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ 2

④ $2\sqrt{2}$

⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x+a)^2 + (y-a)^2 &= 2a^2 - 8a + 15 \\ &= 2(a-2)^2 + 7 \\ &= (\text{반지름})^2\end{aligned}$$

따라서 $a = 2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a, a) = (-2, 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

6. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \text{ 이고}$$

또한 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2 ,$$

$$(r-1)(r-5) = 0$$

$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } 5$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ 또는 } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

$$\therefore 1 + 5 = 6$$

7. 중심이 직선 $3x + y = 12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a, b) 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

중심의 좌표는 (r, r) 이다.

따라서, 구하는 원의 방정식을

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, 점 (r, r) 는 직선 $3x + y = 12$ 위에 있으므로 $3r + r = 12$

$$\therefore r = 3$$

따라서, 구하는 원의 방정식은 $\textcircled{7}$ 에서 $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$

8. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x - k)^2 + (y + k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

반지름의 길이가 1 이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } -k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0, (k - 1)(k - 3) = 0$$

$$\therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 합은 4이다.

9. 두 원 $x^2 + y^2 = 2$ 과 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 2$ 이 만나지 않을 때, 실수 a 의 값의 범위는 $a < p$ 또는 $a > q$ 이다. 이때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

두 원 $x^2 + y^2 = 2$, $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 2$ 는 만나지 않는다.
즉, 두 원이 서로 외부에 있거나 한 원이 다른 원의 내부에 있어야 하는데, 두 원의 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{2}$ 이므로 한 원이 다른 원의 내부에 있을 수는 없다. 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 0)$, (a, a) 이므로 중심거리는

$$\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}|a|$$

따라서 두 원이 서로 외부에 있으려면

$$\sqrt{2}|a| > \sqrt{2} + \sqrt{2}, |a| > 2$$

$$\therefore a < -2 \text{ 또는 } a > 2$$

10. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$ 이므로
중심은 $(2, -3)$ 이다.

구하는 원의 반지름을 r 라 하면

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2 \text{ 이고,}$$

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$(1 - 2)^2 + (2 + 3)^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 = 26$$

11. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 4$ 에 대하여 두 원이 외접할 때 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

외접하기 위한 조건은 $\sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 1$

$$\therefore a^2 + b^2 = 9$$

12. 점 $(-4, 2)$ 를 지나고 x 축, y 축에 모두 접하는 원은 2 개가 있다. 이 때, 두 원 중 큰 원의 넓이는?

① 25π

② 50π

③ 75π

④ 100π

⑤ 125π

해설

제 2 사분면의 점 $(-4, 2)$ 를 지나고
 x 축, y 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2 (r > 0)$$

$$(-4 + r)^2 + (2 - r)^2 = r^2$$

$$16 - 8r + r^2 + 4 - 4r + r^2 = r^2, (r - 2)(r - 10) = 0$$

$$\therefore r = 2 \text{ 또는 } r = 10$$

따라서 큰 원의 반지름의 길이가 10 이므로

$$\text{넓이는 } \pi \cdot 10^2 = 100\pi$$

13. 두 정점 A(0,0), B(0,3) 에서의 거리의 비가 2 : 1 인 점 P(x,y) 의 자취는?

① $x^2 + (y - 4)^2 = 4$

② $x^2 + (y + 4)^2 = 4$

③ $(x - 4)^2 + y^2 = 4$

④ $(x + 4)^2 + y^2 = 4$

⑤ $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$

해설

$$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$$

$$\text{즉 } 4\overline{PB}^2 = \overline{PA}^2 \text{ 이므로}$$

$$4\{x^2 + (y - 3)^2\} = x^2 + y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 - 24y + 36 = 0$$

$$\therefore x^2 + (y - 4)^2 = 4$$

14. 두 점 $A(3,0)$, $B(-2,0)$ 에서의 거리의 비가 $2:3$ 인 점 P 의 자취의 넓이는?

① 9π

② 16π

③ 25π

④ 36π

⑤ 49π

해설

점 P 의 좌표를 $P(x,y)$ 라 하면

$$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$$

$$\text{즉 } 4\overline{PB}^2 = 9\overline{PA}^2 \text{ 이므로}$$

$$4\{(x+2)^2 + y^2\} = 9\{(x-3)^2 + y^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 13 = 0$$

$$\therefore (x-7)^2 + y^2 = 36$$

따라서 점 P 는 중심이 $(7, 0)$ 이고,

반지름의 길이가 6인 원 위를 움직이므로

$$\text{구하는 자취의 넓이는 } \pi \cdot 6^2 = 36\pi$$

15. 두 점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$

② 2

③ $\frac{5}{2}$

④ 3

⑤ 4

해설

조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$

$$2\overline{BP} = \overline{AP}$$

$$\therefore 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

$$\text{그런데 } \overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$4\{(x-2)^2 + y^2\} = \{(x+1)^2 + y^2\}$$

$$\text{정리하면 } (x-3)^2 + y^2 = 4$$

따라서 원의 반지름은 2 이다.

