1. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값은?

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1, x=2$를 각각 대입하면
$x=-1$일 때,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$①
$x=2$일 때, $(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$②
①, ②를 연립하면
$m=\frac{2}{3},\ n=-\frac{13}{3}$
$\therefore\ m-n=5$

2. 다항식 $f(x)$를 x^2-x로 나누면 3이 남고 x^2+x-6로 나누면 $x-1$이 남을 때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ -2 ⑤ -3

해설

$f(x)=x(x-1)Q_1(x)+3$

$f(x)=(x-2)(x+3)Q_2(x)+x-1$

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

$f(1)=3,\ f(2)=1$ 이므로

$a+b=3,\ 2a+b=1$

연립하여 풀면, $a=-2,\ b=5$

$\therefore$(구하는 나머지)$R(x)=-2x+5$

$\therefore\ R(1)=3$

3. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 2이고, $x+2$로 나눈 나머지가 5이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

나머지 정리에 의하여,

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$라 할 수 있다.

$f(1)=a+b=2$

$f(-2)=-2a+b=5$

연립하면, $a=-1 \quad b=3$

$\therefore R(x)=-x+3$

$R(2)=1$

4. 다항식 $f(x)$를 $x+1$, $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 각각 3, -1이다. 이때, $f(x)$를 x^2+3x+2로 나눌 때의 나머지는?

① $2x+5$ ② $-3x$ ③ $3x+6$

④ $4x+7$ ⑤ $5x+8$

해설

다항식 $f(x)$를 x^2+3x+2, 즉 $(x+1)(x+2)$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라고 하면

$f(x)=(x+1)(x+2)Q(x)+ax+b$로 놓을 수 있다.

문제의 조건에서 $f(-1)=3$, $f(-2)=-1$이므로

$f(-1)=-a+b=3$

$f(-2)=-2a+b=-1$

이것을 풀면 $a=4$, $b=7$

따라서, 구하는 나머지는 $4x+7$

5. 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이고, 또 $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -2이다. $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x)=(x-3)Q(x)+1$

$Q(2)=-2$

$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 $f(2)$이다.

$$\begin{aligned} f(2) &= (2-3)Q(2)+1 \\ &= -1\times(-2)+1=3 \end{aligned}$$

6. x에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} k & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & a \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{5} \end{array}$$

① $a=3$ ② $b=2$ ③ $c=1$

④ $d=4$ ⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & -1 & b \\ & & 1 & a+1 & a \\ \hline & 1 & a+1 & a & \boxed{b+a} \end{array}$$

$k=1,\ a=3,\ b=2,\ c=1,\ d=4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

7. 다항식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때의 나머지가 3이고, x^2-4x+3으로 나눌 때의 나머지가 $3x$일 때, $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지는?

① 3 ② $3x+3$ ③ $3x-3$

④ $6x-9$ ⑤ $9x+6$

해설

$f(x)=(x-2)(x-1)Q(x)+3$

$f(x)=(x-3)(x-1)Q'(x)+3x$

$\therefore\ f(2)=3,\ f(3)=9$ $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=(x-2)(x-3)Q''(x)+ax+b$

$f(2)=2a+b=3,\ f(3)=3a+b=9$

$a=6,\ b=-9$

$\therefore$ 나머지는 $6x-9$

8. x^{100} 을 $x+2$ 로 나눈 몫을 $a_{0+}a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{99}x^{99}$ 라 할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{99}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{5}(1-2^{100})$　② $\frac{1}{6}(1-2^{100})$　③ $\frac{1}{4}(1-2^{100})$
④ $\frac{1}{3}(1-2^{100})$　⑤ 1

해설

(i) $f(x)=x^{100}=(x+2)Q(x)+R$ 라 하면

$f(-2)=2^{100}=R$

$\therefore\ R=2^{100}$

$f(1)=3Q(1)+R$

$\therefore\ Q(1)=\frac{1}{3}(1-R)=\frac{1}{3}(1-2^{100})$

(ii) $Q(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{99}x^{99}$

$\therefore\ Q(1)=a_0+a_1+\cdots+a_{99}$

$\therefore\ a_0+a_1+\cdots+a_{99}=Q(1)=\frac{1}{3}(1-2^{100})$

9. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-3)^2$으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+3$으로 나누면 4가 남는다고 한다. 이 때, $f(x)$를 $(x-3)^2(x+3)$으로 나눈 나머지는?

① $(x-3)^2$　② $3x^2+2x-5$　③ $\frac{1}{5}(x-3)^2$
④ x^2+2x-5　⑤ $\frac{1}{9}(x-3)^2$

해설

$f(-3)=4$

$f(x)=(x-3)^2(x+3)Q(x)+ax^2+bx+c$

$f(x)=(x-3)^2(x+3)Q(x)+a(x-3)^2$($\because$ $f(x)$는 $(x-3)^2$으로 나누어 떨어진다.

$f(x)=(x-3)^2\{(x+3)Q(x)+a\}$

$f(-3)=(-3-3)^2a=4$

$\therefore\ a=\frac{1}{9}$

$\therefore$구하는 나머지 : $\frac{1}{9}(x-3)^2$

10. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$

ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$

iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$

iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.

$a = 1,\ b = 4,\ c = 6,\ d = 4,\ e = 1$

$\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$

(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$

다음처럼 조립제법으로 $t - 1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} = e \\
 & & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} = d & \\
 & & 1 & 3 & & \\
\hline
1 & 1 & 3 & \boxed{6} = c & & \\
 & & 1 & & & \\
\hline
a = & 1 & \boxed{4} = b & & &
\end{array}
$$

$\therefore 2c - bd = -4$