

1. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 가 x 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$-2 = 2a \quad \therefore a = -1$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$-3 = -b \quad \therefore b = 3$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$0 = 2c \quad \therefore c = 0$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

2. 등식 $x^3 + x - 1 = (x - a)(x - b)(x - c)$ 가 항등식일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하면?

① 2

② 5

③ 3

④ 7

⑤ -7

해설

$$x^3 + x - 1$$

$$= (x - a)(x - b)(x - c)$$

$$= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

$$\therefore a + b + c = 0, ab + bc + ca = 1, abc = 1$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3$$

3. k 의 값에 관계없이 $(2k^2 - 3k)x - (k + 2)y - (k^2 - 4)z = 28$ 이 항상 성립하도록 x, y, z 의 값을 정할 때, $3x + y + z$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

주어진 식을 k 에 대해 정리하면

$$(2x - z)k^2 - (3x + y)k - (2y - 4z + 28) = 0$$

$$\therefore 2x - z = 0, 3x + y = 0, 2y - 4z + 28 = 0$$

$z = 2x$, $y = -3x$ 을 $2y - 4z + 28 = 0$ 에 대입하면

$$x = 2, y = -6, z = 4$$

$$\therefore 3x + y + z = 4$$

4. 2가 아닌 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{ax^2 + 4x + b}{x - 2}$ 의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a - b$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\frac{ax^2 + 4x + b}{x - 2} = k \text{라 하면}$$

$$ax^2 + 4x + b = k(x - 2)$$

$$ax^2 + (4 - k)x + b + 2k = 0$$

x 에 대한 항등식이므로

$$a = 0$$

$$4 - k = 0 \text{에서 } k = 4$$

$$b + 2k = 0 \text{에서 } b = -8$$

$$\therefore a - b = 8$$

해설

주어진 식이 모든 x 에 대해 일정한 값을 가지려면

분자인 $ax^2 + 4x + b$ 가 분모인 ' $x - 2$ ' 만을 인수로 가져야 한다.

즉, 분자가 $k(x - 2)$ 가 되어야 한다.

$$\frac{ax^2 + 4x + b}{x - 2} = \frac{4(x - 2)}{x - 2} = 4$$

$$\therefore a = 0, b = -8 \text{에서 } a - b = 8$$

5. $x-y=1$ 을 만족하는 임의의 실수 x, y 에 대하여 $ax^2+bxy+cy^2-1=0$ 이 항상 성립할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$y = x - 1$ 을 준식에 대입하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $(a+b+c)x^2 - (b+2c)x + c - 1 = 0$

x 에 대한 항등식이므로

$$a+b+c=0, b+2c=0, c-1=0$$

$$\therefore a=1, b=-2, c=1$$

$$\therefore a+b+c=0$$

6. $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 을 동시에 만족시키는 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 이 성립할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 11

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 4

해설

(i) $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 에서

x, y 를 z 에 대하여 나타내면

$$x = 2z + 1, y = -3z - 1$$

(ii) $x = 2z + 1$, $y = -3z - 1$ 을 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 에 대입하여 정리하면

$$(4a + 9b + c)z^2 + 2(2a + 3b)z + (a + b - 1) = 0$$

$$\therefore 4a + 9b + c = 0, 2a + 3b = 0, a + b - 1 = 0$$

$$\therefore a = 3, b = -2, c = 6$$

$$\therefore a + b + c = 7$$

7. 다항식 $2x^3 + ax^2 + x + b$ 가 $x^2 - x + 1$ 로 나누어떨어질 때, $a - b$ 의 값은?

① -4

② -2

③ 2

④ 3

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & 2x^3 + ax^2 + x + b \\ &= (x^2 - x + 1)(2x + c) \\ &= 2x^3 + (c - 2)x^2 + (2 - c)x + c \\ &\therefore a = c - 2, 1 = 2 - c, b = c \\ &c = 1 \text{ 이므로 } a = -1, b = 1 \\ &\therefore a - b = -2 \end{aligned}$$

8. 임의의 실수 x 대하여 $(1+2x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 항상 성립할 때, $2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ 의 값은?

① 1023

② 1024

③ 1025

④ 2046

⑤ 2050

해설

$$x = 0 \text{ 대입, } a_0 = 1$$

$$x = 1 \text{ 대입, } 2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$$

$$2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = 1 + 1024 = 1025$$

9. x 에 관한 항등식 $x^n(x^2 + ax + b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$ 가 성립할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1

② -1

③ 2

④ -2

⑤ 5

해설

$$x^n(x^2 + ax + b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$$

위의 식에 $x = 2$ 를 대입하면, $2^n(4 + 2a + b) = 0$

$$\therefore b = -2a - 4 (2^n \neq 0) \cdots \textcircled{1}$$

①을 준식에 대입하면,

$$x^n(x^2 + ax - 2a - 4) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$$

$$x^n(x-2)(x+a+2) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$$

위의 식이 항등식이므로 다음 식도 항등식이다.

$$x^n(x+a+2) = (x-2)p(x) + 2^n$$

다시 $x = 2$ 를 대입하면,

$$2^n(4+a) = 2^n \quad \therefore a = -3$$

$a = -3$ 을 ①에 대입하면,

$$b = (-2)(-3) - 4 = 2$$

$$\therefore a = -3, b = 2$$

$$\therefore a + b = -1$$

10. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x-1$ 로 나누면 나누어떨어지고, $x+2$ 로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, $m-n$ 의 값은?

① -2

② -3

③ -4

④ 2

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}x^3 + mx^2 + nx + 1 &= (x-1)Q(x) \\ &= (x+2)Q'(x) + 3\end{aligned}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 + m + n + 1 = 0$$

$$\therefore m + n = -2 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

양변에 $x=-2$ 을 대입하면

$$-8 + 4m - 2n + 1 = 3$$

$$\therefore 2m - n = 5 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

㉠, ㉡에서 $m=1, n=-3$

$$\therefore m - n = 4$$

11. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지가 각각 1, 2일 때, $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x-1$

② $x+1$

③ $-x+1$

④ x

⑤ $-x$

해설

$$f(x) = (x-1)Q_1(x) + 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

$$f(x) = (x-2)Q_2(x) + 2 \Rightarrow f(2) = 2$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q_3(x) + ax + b \text{라 하면,}$$

$$f(1) = a + b = 1, \quad f(2) = 2a + b = 2 \text{이다.}$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 0 \text{이므로 나머지는 } x$$

12. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때의 나머지가 3이고, $x^2 - 4x + 3$ 으로 나눌 때의 나머지가 $3x$ 일 때, $f(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눌 때의 나머지는?

① 3

② $3x + 3$

③ $3x - 3$

④ $6x - 9$

⑤ $9x + 6$

해설

$$f(x) = (x-2)(x-1)Q(x) + 3$$

$$f(x) = (x-3)(x-1)Q'(x) + 3x$$

$\therefore f(2) = 3, f(3) = 9$ $f(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눌 때의 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$f(x) = (x-2)(x-3)Q''(x) + ax + b$$

$$f(2) = 2a + b = 3, f(3) = 3a + b = 9$$

$$a = 6, b = -9$$

$\therefore$ 나머지는 $6x - 9$

13. 다항식 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지는 5이고, 몫 $Q(x)$ 를 다시 $x+3$ 으로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $f(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지는?

① 10

② -10

③ 9

④ -9

⑤ 8

해설

나머지정리에 의해 $f(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지는 $f(-3)$ 이다.

$f(x) = (x-2)Q(x) + 5$ 에서

$x = -3$ 을 대입하면 $f(-3) = (-3-2)Q(-3) + 5$

$Q(x)$ 를 $x+3$ 으로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 $Q(-3) = 3$

$\therefore f(-3) = -10$

14. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x) + g(x)$ 를 $x^2 + 3x - 15$ 으로 나누면 나머지가 12이다. 또 $f(x) - g(x)$ 를 $x^2 + 3x - 15$ 로 나누면 나머지가 -2이다.

이때, $f(x)$ 를 $x^2 + 3x - 15$ 으로 나눈 나머지는?

㉠ 5

㉡ 10

㉢ 15

㉣ 20

㉤ 24

해설

$$f(x) + g(x) = (x^2 + 3x - 15) Q_1(x) + 12 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(x) - g(x) = (x^2 + 3x - 15) Q_2(x) - 2 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$2f(x) = (x^2 + 3x - 15) (Q_1(x) + Q_2(x)) + 10$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (x^2 + 3x - 15) (Q_1(x) + Q_2(x)) + 5$$

$\therefore$ 나머지는 5

15. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면 $Q(x)$ 의 계수의 총합(상수항 포함)과 R 과의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{29} + 1)$

② $\frac{1}{2} \cdot 3^{30}$

③ $\frac{1}{2}(3^{30} - 1)$

④ $\frac{1}{2}(3^{30} + 1)$

⑤ $\frac{1}{2}(3^{29} - 1)$

해설

$$x^{30} = (x-3)Q(x) + R$$

$$x = 3 \text{을 대입하면 } 3^{30} = R$$

$Q(x)$ 의 계수의 총합은 $Q(1)$ 과 같으므로

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 = -2Q(1) + 3^{30}$$

$$\therefore Q(1) = \frac{3^{30} - 1}{2}$$

$$\therefore R - Q(1) = 3^{30} - \frac{3^{30} - 1}{2} = \frac{3^{30} + 1}{2} = \frac{1}{2}(3^{30} + 1)$$

16. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-3)^2$ 으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+3$ 으로 나누면 4가 남는다고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $(x-3)^2(x+3)$ 으로 나눈 나머지는?

① $(x-3)^2$

② $3x^2 + 2x - 5$

③ $\frac{1}{5}(x-3)^2$

④ $x^2 + 2x - 5$

⑤ $\frac{1}{9}(x-3)^2$

해설

$$f(-3) = 4$$

$$f(x) = (x-3)^2(x+3)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$f(x) = (x-3)^2(x+3)Q(x) + a(x-3)^2$ ($\because f(x)$ 는 $(x-3)^2$ 으로 나누어 떨어진다.)

$$f(x) = (x-3)^2 \{(x+3)Q(x) + a\}$$

$$f(-3) = (-3-3)^2 a = 4$$

$$\therefore a = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \text{구하는 나머지} : \frac{1}{9}(x-3)^2$$

17. x^3 의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ 이 성립한다. 이 때, $f(x)$ 를 $x - 4$ 로 나눈 나머지는?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ 에서 $f(x) = x$

즉, $f(x) - x$ 는 $x - 1, x - 2, x - 3$ 을 인수로 한다.

$$f(x) - x = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$\therefore f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) + x, f(4) = 10$$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면

$$(i) f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + 1 = 1$$

$$(ii) f(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c + 8 = 2$$

$$(iii) f(3) = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c + 27 = 3$$

위의 세식을 연립하여 풀면,

$$a = -6, b = 12, c = -6$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$$

$$\therefore f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 6 = 10$$

18. 다항식 $ax^3 + bx^2 - 4$ 가 $x^2 + x - 2$ 로 나누어 떨어지도록 a, b 를 정할 때, a 와 b 의 곱을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 - 4 &= (x^2 + x - 2)Q(x) \\ &= (x - 1)(x + 2)Q(x) \end{aligned}$$

양변에 $x = 1, x = -2$ 를 각각 대입하면

$$a + b - 4 = 0, -8a + 4b - 4 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 3$

$$\therefore ab = 3$$

해설

$$ax^3 + bx^2 - 4 = (x^2 + x - 2)(ax + 2)$$

우변을 전개하여 계수를 비교하면

$$a = 1, b = 3 \therefore ab = 3$$

19. x 에 관한 항등식 $x^3 + 2x^2 - 3x + 5 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 를 만족시키는 a, b, c, d 에 대하여 $abcd$ 의 값은?

① -10

② 10

③ 50

④ 100

⑤ 200

해설

$$\begin{aligned} & a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d \\ &= (x-1)\{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\} + d \\ &= (x-1)[(x-1)\{a(x-1) + b\} + c] + d \end{aligned}$$

따라서 $x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ 를 $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막의 몫이 a 이다.

$$a = 1, b = 5, c = 4, d = 5$$

$$\therefore abcd = 100$$

20. $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ 일 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하면?

① -5

② 0

③ 2

④ 3

⑤ 5

해설

± 상수항의 약수 중에서 $x = -1, 2$ 을 대입하면 식의 값이 0이므로

주어진 식은 $x+1, x-2$ 을 인수로 갖는다.

조립제법으로 나누어 보면,

-1	1	0	-15	10	24
		-1	1	14	-24
2	1	-1	-14	24	0
		2	2	-24	
3	1	1	-12	0	
		3	12		
-4	1	4	0		
		-4			
	1	0			

$$x^4 - 15x^2 + 10x + 24$$

$$= (x+1)(x-2)(x-3)(x+4)$$

$$\therefore a+b+c+d = 1 + (-2) + (-3) + 4 = 0$$