

1. 모든 x 에 대하여 $f(x+1) - f(x-1) = 6x^2 + 6$, $f(0) = 1$ 을 만족시키는 다항식 $f(x)$ 가 있다. 다음은 자연수 n 에 대하여 $(x+\alpha)^n = x^n + n\alpha x^{n-1} + \dots + \alpha^n$ 을 이용하여, $f(x)$ 를 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ (단, } a_n \neq 0 \text{) 라고 놓으면} \\
 f(x+1) - f(x-1) &= a_n \{ (x+1)^n - (x-1)^n \} + a_{n-1} \{ (x+1)^{n-1} - (x-1)^{n-1} \} + \dots + \\
 &\quad a_1 \{ (x+1) - (x-1) \} \\
 &= \boxed{} x^{n-1} + \dots = 6x^2 + 6 \\
 \text{예} \text{서 } n &= 3, \ a_n = 1 \\
 \therefore f(x) &= x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + 1 \\
 f(x+1) - f(x-1) &= 6x^2 + 4a_2 x + 2 + 2a_1 \\
 \text{이} \text{므로 } a_2 &= 0, \ a_1 = 2 \ \text{즉, } f(x) = x^3 + 2x + 1
 \end{aligned}$$

위의 풀이 과정에서 $\boxed{}$ 에 알맞은 것은?

- ① a_n

② $2a_n$

③ na_n

④ $2na_n$

⑤ $3na_n$

해설

$$\begin{aligned}
 f(x+1) - f(x-1) &= a_n \{ (x+1)^n - (x-1)^n \} + a_{n-1} \{ (x+1)^{n-1} - (x-1)^{n-1} \} \dots \\
 &= a_n \{ (x^n + nx^{n-1} + \dots) - (x^n - nx^{n-1} + \dots) \} + a_{n-1} \{ (x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots) - (x^{n-1} - (n-1)x^{n-2} + \dots) \} + \dots \\
 &= a_n (2nx^{n-1} + \dots) + a_{n-1} \{ 2(n-1)x^{n-2} + \dots \} + \dots \\
 &= 2na_n x^{n-1} + \{ (n-2) \text{ 차 이하의 다항식} \} \\
 \therefore 2na_n x^{n-1} &= 6x^2 \text{ 예} \text{서} \\
 n-1 &= 2, \ 2na_n = 6 \\
 \therefore n &= 3, \ a_n = 1
 \end{aligned}$$

2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ 일 때, $f(x) - 2 = x(x^2 - 1) + a(x - x^2) + b(x^2 - 1)$ 가 항상 성립하도록 하는 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) - 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ 이므로
 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x(x^2 - 1) + a(x - x^2) + b(x^2 - 1)$
 $= x^3 + (-a + b)x^2 + (a - 1)x - b \cdots \text{㉠}$
㉠이 x 에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같은 항의 계수가 같아야 한다.
즉, $-a + b = -3, a - 1 = 3, b = 1$
이므로 $a = 4, b = 1$
 $\therefore a + b = 5$

3. x 에 대한 항등식 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + cx(x - 1)$ 에서 a, b, c 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -1$

▷ 정답 : $c = 1$

해설

계수비교법에 의하여

$$x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + cx(x - 1)$$

$$= cx^2 + (b - c)x + a - b$$

$$x^2 - 2x + 3 = cx^2 + (b - c)x + a - b \text{에서}$$

$$c = 1, b - c = -2, a - b = 3$$

연립하여 풀면

$$\therefore a = 2, b = -1, c = 1$$

4. 상수 a, b 에 대하여 다음 등식이 항상 성립할 때, $2a + b$ 의 값은?

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} = \frac{6(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

- ① 2 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

등식이 항상 성립하기 위해서는 (분모) $\neq 0$ 이어야 한다.

양변에 공통분모인 $(x-1)(x+3)$ 을 곱하면,

$$a(x+3) + b(x-1) = 6(x+1)$$

$$(a+b)x + (3a-b) = 6x+6$$

$$\therefore a+b=6, 3a-b=6$$

두 식을 연립하여 풀면,

$$a=3, b=6-a=3$$

$$\therefore 2a+b=2\times 3+3=9$$

5. 등식 $x^3 + x - 1 = (x - a)(x - b)(x - c)$ 가 항등식일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하면?

① 2

② 5

③ 3

④ 7

⑤ -7

해설

$$\begin{aligned} & x^3 + x - 1 \\ &= (x - a)(x - b)(x - c) \\ &= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc \\ &\therefore a + b + c = 0, \quad ab + bc + ca = 1, \quad abc = 1 \\ & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3 \end{aligned}$$

6. 2가 아닌 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{ax^2+4x+b}{x-2}$ 의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a-b$ 의 값은?

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

해설

$\frac{ax^2+4x+b}{x-2} = k$ 라 하면
 $ax^2+4x+b = k(x-2)$
 $ax^2+(4-k)x+b+2k=0$
 x 에 대한 항등식이므로
 $a=0$
 $4-k=0$ 에서 $k=4$
 $b+2k=0$ 에서 $b=-8$
 $\therefore a-b=8$

해설

주어진 식이 모든 x 에 대해 일정한 값을 가지려면
분자인 ax^2+4x+b 가 분모인 ' $x-2$ ' 만을 인수로 가져야 한다.
즉, 분자가 $k(x-2)$ 가 되어야 한다.
 $\frac{ax^2+4x+b}{x-2} = \frac{4(x-2)}{x-2} = 4$
 $\therefore a=0, b=-8$ 에서 $a-b=8$

7. 모든 실수 x 에 대하여 $P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$, $P(0) = 0$ 을 만족한다.
2차 이하의 다항식 $P(x)$ 의 계수의 합은?
- ① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 무수히 많다.

해설

$P(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면
 $P(0) = 0$ 에서 $c = 0 \therefore P(x) = ax^2 + bx$
 $P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$ 이므로
 $a(x^2+1)^2 + b(x^2+1) = (ax^2+bx)^2 + 1$
 $ax^4 + 2ax^2 + a + bx^2 + b = a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2 + 1$
양변의 계수를 비교하면
 $a = a^2, 2ab = 0, 2a + b = b^2, a + b = 1$
 $a^2 = a$ 와 $a + b = 1$ 에서
 $(a, b) = (0, 1), (1, 0)$ 이 되는데
이 중 $(1, 0)$ 은 $2a + b = b^2$ 을 만족하지 않으므로 $(a, b) = (0, 1)$
즉, $P(x) = x$ 뿐이다.
 $\therefore$ 계수의 합은 1

해설

$P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$ 에서 $x = 0$ 을 대입하면
 $P(1) = \{P(0)\}^2 + 1$ 이 된다.
 $P(1) = 1$ ($\therefore$ 모든 계수의 합은 $x = 1$ 대입)

8. 어떤 일차식 $g(x)$ 에 대하여

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - g(x) = \{(x - \alpha)(x - \beta)\}^2$ 가 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

(우변) = $\{(x - \alpha)(x - \beta)\}^2$
= $\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}^2$
= $x^4 - 2(\alpha + \beta)x^3$
+ $\{(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta\}x^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta)x + \alpha^2\beta^2$
= $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - g(x)$

$g(x)$ 가 일차식이므로 양변의 계수를 비교하면

$-2(\alpha + \beta) = 2, (\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta = -3$

$\therefore \alpha + \beta = -1, \alpha\beta = -2$

9. 다음 등식이 x 에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c, d 에 대하여 $a+b+c+d$ 의 값을 구하면? (단, $a < c$)

$$(x-a)^2(bx-x^2-1) = (x-c)^2(dx-x^2-1)$$

- ① -4 ② 4 ③ 5 ④ -5 ⑤ 0

해설

$a < c$ 에서 $a \neq c$ 이므로 주어진 등식에서
 $x^2 - bx + 1 = (x - c)^2 \quad \therefore b = 2c, 1 = c^2$
 $x^2 - dx + 1 = (x - a)^2 \quad \therefore d = 2a, 1 = a^2$
 $\therefore a = -1, b = 2, c = 1, d = -2$
 $\therefore a + b + c + d = 0$

10. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x 에 대하여
- $$\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
- $$= \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{2007}}{x-2007}$$
- 이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007}$ 의 값을 구하면?
- ① 1

② -1

③ 1997

④ 0

⑤ -1997

해설

우변을 통분하면

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007})x^{2006} + \cdots}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
$$= \frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$

주어진 등식은 항등식이므로 분자의 계수를 비교하면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007} = 0$$

11. x 의 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x^2) = x^3 f(x+1) - 2x^4 + 2x^2$ 이 성립할 때, $f(x)$ 를 구하면? (단, $f(0) = f(1) = f(2) = 0$)

- ① $f(x) = x(x-1)(x-2)$ ② $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$
③ $f(x) = x(x-1)^2(x-2)$ ④ $f(x) = x(x-1)(x-2)^2$
⑤ $f(x) = x^2(x-1)^2(x-2)$

해설

- (i) $f(x)$ 를 n 차의 식이라하면
좌변 : $2n$ 차 = 우변 : $n+3$ 차
 $\therefore n = 3$
(ii) $f(x) = kx(x-1)(x-2)$ (단, $k \neq 0$)
($\because f(0) = f(1) = f(2) = 0$)
좌변 = $kx^6 - 3kx^4 + 2kx^2$
우변 = $kx^6 - (k+2)x^4 + 2x^2$
 $\therefore kx^6 - 3kx^4 + 2kx^2 = kx^6 - (k+2)x^4 + 2x^2$
 $-3k = -(k+2)$
 $k = 2$ 에서 $k = 1$
 $\therefore f(x) = x(x-1)(x-2)$

12. $\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ 가 $x \neq 1$ 인 모두 실수 x 에 대해 항상 성립 하도록 a, b, c 를 구할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2 ② -2 ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$$\frac{a(x^2+x+1) + (bx+c)(x-1)}{x^3-1}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

$$\therefore \frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

분자의 계수를 비교하면

$$a+b=0, a-b+c=2, a-c=1$$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-1, c=0$

$$\therefore a+b+c=0$$

13. $\frac{x+1}{3} = y-2$ 를 만족하는 모든 실수 x, y 에 대하여, 항상 $ax+by=7$ 이 성립할 때, a, b 의 값을 구하여라. (a, b 는 상수)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

▷ 정답 : $b = 3$

해설

$$\frac{x+1}{3} = y-2, x+1 = 3(y-2)$$

$$x-3y = -7$$

$$-x+3y = 7 \Leftrightarrow ax+by = 7$$

$$\therefore a = -1, b = 3$$

14. 다항식 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 2x$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ 이 성립할 때, $2a - b + 2c - d$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$f(0) = 1$ 이므로 $d = 1$
 $f(1) = 0$ 이므로 $a + b + c = -1 \cdots ①$
 $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 2x$ 에서
 $x = -1$ 을 대입하면 $f(-1) = 0$ 이므로
 $-a + b - c = -1 \cdots ②$
 $x = 0$ 을 대입하면 $f(2) = -1$ 이므로
 $8a + 4b + 2c = -2 \cdots ③$
①, ②, ③을 연립하여 풀면
 $\therefore a = \frac{1}{3}, b = -1, c = -\frac{1}{3}, d = 1$
 $\therefore 2a - b + 2c - d = 0$

15. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 가 x 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$-2 = 2a \quad \therefore a = -1$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$-3 = -b \quad \therefore b = 3$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$0 = 2c \quad \therefore c = 0$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

16. 등식 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$ 이 x 에 관한 항등식일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$$

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 2 = a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x = 0 \text{을 대입하면 } 3 = a - b + c \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 3 = a + b + c \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①을 ②, ③에 대입하여 정리하면

$$b - c = -1, b + c = 1$$

두 식을 연립하면 $b = 0, c = 1$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 0 + 1 = 5$$

17. $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x-1)$ 이 x 에 대한
항등식이 되도록 a, b, c 의 값을 정하면?

- ① $a = 1, b = -1, c = 2$ ② $a = -1, b = 1, c = -2$
③ $a = 1, b = 1, c = 2$ ④ $a = -1, b = -1, c = -2$
⑤ $a = 1, b = -1, c = -2$

해설

수치대입법을 이용한다.

$$x = 0 \text{을 대입 } -2 = -2a \quad \therefore a = 1$$

$$x = 1 \text{을 대입 } -3 = 3b \quad \therefore b = -1$$

$$x = -2 \text{를 대입 } 12 = 6c \quad \therefore c = 2$$

18. 임의의 x 에 대하여 $x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 를 만족하는 상수 a, b, c, d 의 합 $a + b + c + d$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입 하면
 $-1 = a + b + c + d$
 $\therefore a + b + c + d = -1$

해설

$x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$
 $= (x+1)\{a(x+1)^2 + b(x+1) + c\} + d$
 $= (x+1)[(x+1)\{a(x+1) + b\} + c] + d$ 이므로
 $x^3 - 1$ 을 $x + 1$ 로 연속으로 나눌 때
차례대로 나오는 나머지가 d, c, b 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

-1	1	0	0	-1	
		-1	1	-1	
-1	1	-1	1	-2	← d
		-1	2		
-1	1	-2	3	← c	
		-1			
	1	-3	← b		
	↑				
	a				

19. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 이 x 에 관한
항등식이 되도록 할 때, $2ab$ 의 값은?

㉠ -6 ㉡ -4 ㉢ -2 ㉣ 2 ㉤ 4

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면, $-2 = 2a \quad \therefore a = -1$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면, $-3 = -b \quad \therefore b = 3$

$\therefore 2ab = -6$

20. 다음 등식이 x 에 대한 항등식일 때, $a - b + c$ 의 값은?

$$x^2 - 2x + 4 = a(x - 1)(x - 2) + bx(x - 2) + cx(x - 1)$$

- ① 8
- ② 7
- ③ 3
- ④ 0
- ⑤ -3

해설

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로 x 에 어떤 값을 대입하여도 성립한다.

$x = 0$ 을 대입하면

$$4 = 2a \quad \therefore a = 2$$

$x = 1$ 을 대입하면

$$3 = -b \quad \therefore b = -3$$

$x = 2$ 을 대입하면

$$4 = 2c \quad \therefore c = 2$$

$$\therefore a - b + c = 2 - (-3) + 2 = 7$$

21. 등식 $(x+1)(x-1)(x^3-x^2+x-1) = x^5-x^4+ax-b$ 가 항상 성립하도록 a, b 값을 정할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x=1$ 을 대입하면, $0=a-b \cdots \textcircled{1}$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면, $0=-2-a-b \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a=b=-1$

$\therefore a+b=-2$

22. 등식 $2x^2 - 3x - 1 = a(x-1)(x-2) + bx(x-1) + cx(x-2)$ 이 x 에 관한 항등식이 되도록 할 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

수치대입법을 이용한다.

$$x = 0 \text{ 대입, } a = -\frac{1}{2}$$

$$x = 2 \text{ 대입, } b = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 \text{ 대입, } c = 2$$

$$\therefore a + b + c = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 = 2$$

23. 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $(x^2 - 2)(x^2 + 3) = x^4 - 2ax^2 + b$ 가 x 에 대한 항등식이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, $2a - b$ 의 값은?

① -3 ② -5 ③ -4 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$(x^2 - 2)(x^2 + 3) = x^4 - 2ax^2 + b \text{에서}$$

$$x^2 = 2 \text{일 때, } 4 - 4a + b = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 = -3 \text{일 때, } 9 + 6a + b = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = -\frac{1}{2}, b = -6$$

$$\therefore 2a - b = 5$$

24. $f(x)$ 가 x 의 다항식일 때 $(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 가 x 에 대한 항등식이 될 때 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 에서

$x^2 = 2$ 를 대입하면 $0 = 16 + 4a + b \cdots \textcircled{1}$

$x^4 = -1$ 을 대입하면 $0 = 1 - a + b \cdots \textcircled{2}$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3, b = -4$

$\therefore a + b = -7$

25. x 의 모든 값에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 상수 a, b, c 의 값의 합을 구하여라.

$$x^3 + 1 = (x - 1)(x - 2)(x - 3) + a(x - 1)(x - 2) + b(x - 1) + c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

x 에 대한 항등식이므로

$$x = 1 \text{ 일 때, } 2 = c \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } 9 = b + c \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$x = 3 \text{ 일 때, } 28 = 2a + 2b + c \cdots \cdots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면 $a = 6, b = 7, c = 2$

$$\therefore a + b + c = 15$$

26. $f(x)$ 가 x 의 다항식일 때, $(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 가 x 에 대한 항등식이 될 때, $2a - b$ 의 값을 구하면?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

준 식의 양변에

$$x^2 = 2 \text{를 대입하면 } 4a + b = -16$$

$$x^4 = -1 \text{을 대입하면 } -a + b = -1$$

$$\therefore a = -3, b = -4$$

$$\therefore 2a - b = -2$$

27. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ 에 대하여 $f(x-1) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ 일 때, 상수 $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

$$\begin{aligned} f(x-1) &= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 5 \\ &= x^3 + Ax^2 + Bx + C \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

㉠은 x 에 대한 항등식이므로
양변에 $x = 0, 1, 2$ 를 차례로 대입하면,
 $x = 0$ 일 때, $-1 = C$
 $x = 1$ 일 때, $5 = 1 + A + B + C$
 $x = 2$ 일 때, $5 = 8 + 4A + 2B + C$
위의 세 식을 연립하여 풀면
 $A = -6, B = 11, C = -1$

28. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 이 성립할 때, $a(b+c)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -30

해설

$$(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

양변에 $x=2, -2, 1$ 을 각각 대입하면

$$0 = 1 + a + b + c, 0 = -27 + 9a - 3b + c, -9 = c$$

세 식을 연립하여 풀면 $a=5, b=3, c=-9$

$$\therefore a(b+c) = 5 \times (3-9) = -30$$

해설

좌변을 전개한 후 조립제법으로 풀어도 좋다.

$$(x-2)(x+2)^2$$

$$= x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$= (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

$$= (x-1)[(x-1)((x-1) + a) + b] + c$$

1		1	2	-4	-8	
			1	3	-1	
1		1	3	-1	-9	← c
			1	4		
1		1	4	3		← b
			1			
		1	5			← a

$$\therefore a(b+c) = 5(3-9) = -30$$

29. x 에 대한 항등식 $\frac{x^2-3x-1}{x-1} - \frac{x^2-x-3}{x+1} + \frac{2}{x} = \frac{Ax+B}{x(x-1)(x+1)}$ 에서 $A-B$ 의 값을 수치대입법을 이용하여 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

분모를 간단히 할 수 있는 숫자를 대입해 보자.

양변에 $x=2$, $x=-2$ 를 대입해서 정리하면

$x=2$ 일 때

$$\frac{4-6-1}{1} - \frac{4-2-3}{3} + \frac{2}{2} = \frac{2A+B}{2 \times 1 \times 3}$$

$$-3 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{2A+B}{6}$$

$$\therefore 2A+B = -10 \cdots \textcircled{1}$$

$x=-2$ 일 때

$$\frac{4+6-1}{-3} - \frac{4+2-3}{-1} + \frac{2}{-2} = \frac{-2A+B}{(-2)(-3)(-1)}$$

$$-3 + 3 - 1 = \frac{-2A+B}{-6}$$

$$\therefore -2A+B = 6 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $A=-4$, $B=-2$

$$\therefore A-B = (-4) - (-2) = -2$$

30. 삼차항의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = f(2) = f(3) = 3$ 이 성립할 때, $f(0)$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -3 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{ 라고 두면,}$$

$$f(1) = 1 + a + b + c = 3$$

$$f(2) = 8 + 4a + 2b + c = 3$$

$$f(3) = 27 + 9a + 3b + c = 3$$

세 식을 연립하여 풀면

$$a = -6, b = 11, c = -3$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 3$$

$$\therefore f(0) = -3$$

해설

$$f(1) = f(2) = f(3) = 3 \text{ 이므로}$$

$$f(x) - 3 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$f(0) - 3 = -1 \times (-2) \times (-3) = -6$$

$$\therefore f(0) = -3$$

31. $x^3 - x^2 + 2 = a(x - p)^3 + b(x - p)^2 + c(x - p)$ 가 x 에 대한항등식이 되도록 실수 $a + b + c + p$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

양변에 $x = p$ 를 대입하면
 $p^3 - p^2 + 2 = 0$
 $(p + 1)(p^2 - 2p + 2) = 0 \therefore p = -1$
따라서 주어진 식은
 $x^3 - x^2 + 2 = a(x + 1)^3 + b(x + 1)^2 + c(x + 1)$
양변에 $x = 0$ 을 대입하면 $2 = a + b + c$
 $\therefore a + b + c + p = 1$

해설

$a(x - p)^3 + b(x - p)^2 + c(x - p)$
 $= (x - p) \{a(x - p)^2 + b(x - p) + c\}$
 $\therefore (x + 1)(x^2 - 2x + 2)$
 $= (x - p) \{a(x - p)^2 + b(x - p) + c\}$
양변을 비교하면, $x + 1 = x - p$,
 $x^2 - 2x + 2 = a(x - p)^2 + b(x - p) + c$
 $\therefore p = -1$
또 $x^2 - 2x + 2 = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$
 $\qquad \qquad \qquad = ax^2 + (2a + b)x + a + b + c$
 $\therefore a = 1, 2a + b = -2, a + b + c = 2$
 $\therefore b = -4, c = 5$
따라서 $a = 1, b = -4, c = 5, p = -1$
 $\therefore a + b + c + p = 1$

32. 3차 이하의 다항식 $f(x)$ 에 대하여

$\frac{f(x)}{x(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{x-3}$ 가 성립할 때, 다음 중 d 와 같은 것은? (단, a, b, c, d 는 실수이다.)

- ① $f(0)$ ② $f(1)$ ③ $\frac{f(2)}{2}$ ④ $\frac{f(3)}{6}$ ⑤ 0

해설

준 식을 정리하면

$$f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + bx(x-2)(x-3) + cx(x-1)(x-3) + dx(x-1)(x-2)$$

$x=3$ 일 때,

$$f(3) = d \cdot 3(3-1)(3-2)$$

$$\therefore d = \frac{f(3)}{6}$$

33. 1985년부터 1995년까지 5년 간격으로 조사한 우리나라의 농가인구 비율 P 는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

연도	85	90	95
인구비율 (%)	20.9	15.5	10.8
인구(1000명)	8521	6661	4851

$P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

이 때, $t = 0$ 은 1985년을 나타낸다. 이 식을 $t = 0$ 이 1990년을 나타내도록 변형하면?

- ① $P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$
- ② $P = 0.35(t + 1)^2 - 5.75(t + 1) + 20.9$
- ③ $P = 0.35(t - 1)^2 - 5.75(t - 1) + 20.9$
- ④ $P = 0.35(t + 2)^2 - 5.75(t + 2) + 20.9$
- ⑤ $P = 0.35(t - 2)^2 - 5.75(t - 2) + 20.9$

해설

$P_1(t) = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$ 일 때,
 $t = 0 \rightarrow 1985$ 년, $t = 1 \rightarrow 1990$ 년, $t = 2 \rightarrow 1995$ 년
 $P_2(t) = 0.35(t + 1)^2 - 5.75(t + 1) + 20.9$ 이면,
 $P_2(0) = P_1(1)$ 이므로 $P_2(t)$ 에서
 $t = 0 \rightarrow 1990$ 년임을 알 수 있다.

34. 등식 $\frac{2x^2 + 13x}{(x + 2)(x - 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 2}$ 가 x 에 대한 항등식이 되도록 상수 A, B, C 의 값을 정할 때, $A + B + C$ 의 값은?

- ① 6
- ② 7
- ③ 8
- ④ 9
- ⑤ 10

해설

양변에 $(x + 2)(x - 1)^2$ 을 곱하면
 $2x^2 + 13x = A(x - 1)(x + 2) + B(x + 2) + C(x - 1)^2$ 에서
 $x = 1, -2, 0$ 을 차례로 대입하여 A, B, C 를 구하면
 $B = 5, C = -2, A = 4$
 $\therefore A + B + C = 7$

35. 임의의 실수 x, y 에 대해서

$$y^{12} + 1 = x_0 + x_1(y - 1) + x_2(y - 1)^2 + x_3(y - 1)^3 + \cdots + x_{12}(y - 1)^{12}$$

이 성립할 때, $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11}$ 의 값은?

- ① 2^{11}

② 2^{12}

③ 2^{13}

④ 3^{11}

⑤ 3^{12}

해설

$y = 2$ 대입: $2^{12} + 1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}$

$y = 0$ 대입: $1 = x_0 - x_1 + x_2 - \cdots + x_{12}$

각변끼리 빼주면

$2^{12} = 2(x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11})$ 이므로

$x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11} = 2^{12-1} = 2^{11}$

36. x 의 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 u, v 에 대하여 $f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$ 가 성립할 때, $f(3)$ 의 값은? (단, $f(1) = 1$ 이라고 한다.)

① -1

② 2

③ -2

④ 1

⑤ 5

해설

$f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$ 가

u, v 에 대한 항등식이므로

$u = 1, v = 0$ 일 때도 이 등식이 성립한다.

$$\therefore f(1)f(0) = f(1) + f(1)$$

$$f(1) = 1 \text{ 이므로 } f(0) = 2$$

또, $u = v = 1$ 일 때는

$$f(1)f(1) = f(2) + f(0) \quad \therefore f(2) = -1$$

$$\therefore f(3) = f(2+1) = f(2)f(1) - f(2-1)$$

$$= f(2)f(1) - f(1) = -1 - 1$$

$$= -2$$

37. $f(x) = x^2 + a$ 에 대하여 $f(x^2)$ 은 $f(x)$ 로 나누어 떨어진다. 이 때, $f(0)$ 를 구하면? (단, $a \neq 0$)

① 2

② -2

③ 0

④ 1

⑤ -1

해설

$f(x) = x^2 + a$ 에서 $f(x^2) = x^4 + a$
 $f(x^2)$ 은 $f(x)$ 로 나누어 떨어지므로
 $x^4 + a = (x^2 + a)Q(x)$
양변에 $x^2 = -a$ 를 대입하면
 $a^2 + a = 0, a(a + 1) = 0$
 $\therefore a = -1 (\because a \neq 0)$
 $f(x) = x^2 - 1 \quad \therefore f(0) = -1$

38. n 이 자연수일 때, 다항식 $x^{2n}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x - 3)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $9^n(x - 3)$ 이 될 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^{2n}(x^2 + ax + b) = (x - 3)^2 Q(x) + 9^n(x - 3)$
 $x^{2n}(x - 3)(x - \alpha) = (x - 3)(x - 3)Q(x) + 9^n$ 라 놓으면,
 $x^{2n}(x - \alpha) = (x - 3)Q(x) + 9^n$ 이고
양변에 $x = 3$ 을 대입하면, $9^n(3 - \alpha) = 9^n$
 $\therefore 3 - \alpha = 1, \alpha = 2$
그러므로 $a = -5, b = 6$ 이 된다.
따라서 $a + b = 1$

39. 다항식 $x^{2005} + x^5 + x^3 + 1$ 을 삼차식 $x^3 + x^2 + x + 1$ 로 나누었을 때의 나머지는?

- ① $x^2 - 3$
- ② $x^2 + x - 2$
- ③ $-x^2 - 1$
- ④ $-x^2 + x$
- ⑤ $x - 1$

해설

$x^{2005} + x^5 + x^3 + 1 = (x^3 + x^2 + x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c = (x + 1)(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$ 양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $a - b + c = -2 \cdots \textcircled{1}$
 $(x^2)^{1002} \times x + (x^2)^2 \times x + x^2 \times x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$ 에서 양변에 $x^2 = -1$ 을 대입하면 $x + x - x + 1 = -a + bx + c$
 $x + 1 = bx + c - a$
 $\therefore b = 1, c - a = 1 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = -1, b = 1, c = 0$
 $\therefore$ 구하는 나머지는 $-x^2 + x$

해설

$x^{2005} + x^5 + x^3 + 1 = (x^3 + x^2 + x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c = (x + 1)(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$
양변에 $x^2 = -1$ 을 대입하면 좌변이 $x + 1$
즉, 좌변의 식을 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 1$
따라서 $ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + x + 1$
 $x^{2005} + x^5 + x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)Q(x) + a(x^2 + 1) + x + 1 = (x^2 + 1)((x + 1)Q(x) + a) + x + 1$
양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $-2 = 2a$
 $\therefore a = -1$
 $\therefore$ 구하는 나머지는 $-x^2 + x$

40. x 에 대한 다항식 $x^{10}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x - 2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2^{10}(x - 2)$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $3b - 2a$ 의 값은?

① 3

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$x^{10}(x^2 + ax + b) = (x - 2)^2 Q(x) + 2^{10}(x - 2)$$

$$x^{10}(x^2 + ax + b) = (x - 2) \{ (x - 2) Q(x) + 2^{10} \} \text{이므로}$$

$$x^2 + ax + b = (x - 2)(x - \alpha) \text{라 할 수 있다.}$$

$$x^{10}(x - 2)(x - \alpha) = (x - 2) \{ (x - 2) Q(x) + 2^{10} \}$$

$$\therefore x^{10}(x - \alpha) = (x - 2) Q(x) + 2^{10}$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$2^{10}(2 - \alpha) = 2^{10} \therefore \alpha = 1$$

$$\therefore x^2 + ax + b = (x - 2)(x - 1)$$

$$= x^2 - 3x + 2$$

$$a = -3, b = 2$$

$$\therefore 3b - 2a = 12$$

41. 자연수 n 에 대하여 다항식 $f(x) = x^n(x^2 + ax + b)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2^n(x-2)$ 일 때, $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나눈 나머지는?

① $2 \cdot 3^n$ ② 3^n ③ 3^{n+1} ④ $4 \cdot 3^n$ ⑤ 3^{2n}

해설

$$\begin{aligned}x^n(x^2 + ax + b) &= (x-2)^2 Q(x) + 2^n(x-2) \\x^n(x^2 + ax + b) &= x^n(x-2)(x+\alpha) \text{이라 하면} \\x^n(x-2)(x+\alpha) &= (x-2)\{(x-2)Q(x) + 2^n\} \\\therefore x^n(x+\alpha) &= (x-2)Q(x) + 2^n \\\text{양변에 } x=2 \text{를 대입하면} \\2^n(2+\alpha) &= 2^n \\2+\alpha &= 1 \\\therefore \alpha &= -1 \\x^2 + ax + b &= (x-1)(x-2) \\\therefore a &= -3, b = 2 \\f(x) &= x^n(x^2 - 3x + 2) \text{이므로} \\f(3) &= 3^n(9 - 9 + 2) \\&= 2 \times 3^n\end{aligned}$$

42. 다항식 $p(x)$ 는 다음 등식을 만족시킨다.

$$\frac{p(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3} + \frac{d}{x-4} + \frac{e}{x-5}$$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c, d, e 는 상수)

- ☐

㉠

☐

$p(3) = 3$ 이면 $c = 3$ 이다.

☐

㉡

☐

$p(1) = p(5)$ 이면 $a = e$ 이다.
- ☐

㉢
- ☐

$b = 2$ 이면 $p(2) = -12$ 이다.

☐

㉤

☐

$a : bc = p(1) : p(2)p(3)$ 이다.

- ①

㉠, ㉡

②

㉡, ㉢

③

㉢, ㉤

④

㉠, ㉡, ㉢

⑤

㉡, ㉢, ㉤

해설

주어진 식의 양변에 $x-1$ 을 곱하면

$$\frac{p(x)}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = a + \frac{b(x-1)}{x-2} + \frac{c(x-1)}{x-3} + \frac{d(x-1)}{x-4} + \frac{e(x-1)}{x-5}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$a = \frac{p(1)}{(-1)(-2)(-3)(-4)}$$

같은 방법으로

$$b = \frac{p(2)}{1 \cdot (-1)(-2)(-3)}, \quad c = \frac{p(3)}{2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2)}, \quad d = \frac{p(4)}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)}, \quad e = \frac{p(5)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

따라서 ㉡, ㉤만 옳다.

43. $a^3 + b^3 + c^3 = p(a + b + c)^3 + q(a + b + c)(ab + bc + ca) + rabc$ 가 a, b, c 에 대한 항등식이 되도록 상수 p, q, r 의 값을 정할 때, $p + q + r$ 을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ -23 ⑤ 23

해설

$a^3 + b^3 + c^3 = p(a + b + c)^3 + q(a + b + c)(ab + bc + ca) + rabc$ 에서 a, b, c 에 대한 항등식이므로
 $a = 1, b = 0, c = 0 : 1 = p \cdots$ ①
 $a = 1, b = 1, c = 0 : 2 = 2p + 2q \cdots$ ②
 $a = 1, b = 1, c = 1 : 3 = 27p + 9q + r \cdots$ ③
①, ②, ③에서 $p = 1, q = 0, r = -24$
 $\therefore p + q + r = -23$

44. 두 조건 ㉠, ㉡를 모두 만족시키는 2차의 다항식 $f(x)$ 의 개수는?

㉠ $f(0) = -1$
㉡ $f(x^2)$ 은 $f(x)$ 로 나누어 떨어진다.

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 없다.

해설

$f(0) = -1$ 이므로
 $f(x) = ax^2 + bx - 1$ ($a \neq 0$)라 하면
 $f(x^2) = ax^4 + bx^2 - 1$ 이다.
 $f(x^2)$ 이 $f(x)$ 로 나누어 떨어지므로
그 몫을 $x^2 + cx + 1$ 이라 하면,
 $(ax^4 + bx^2 - 1) = (ax^2 + bx - 1)(x^2 + cx + 1)$
이 항등식이 되어야 한다.
계수비교에 의해 $ac + b = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $a + bc - 1 = b \cdots \textcircled{2}$
 $b - c = 0 \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{3}$ 에서 $c = b$, 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b(a + 1) = 0$
 $\therefore b = 0$ 또는 $a = -1$
(i) $b = 0$ 이면 $\textcircled{2}$ 에서 $a = 1$
(ii) $a = -1$ 이면 $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 에서 $b^2 - b - 2 = 0$
 $\therefore b = 2$ 또는 -1
 $\therefore (a, b) = (1, 0), (-1, 2), (-1, -1)$ 의 3 쌍

45. 다항식 $6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$ 을 $3x - 2$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $Q(1) + R$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\begin{aligned} 6x^3 - 7x^2 + 17x - 3 &= (3x - 2)Q(x) + R \\ \text{양변에 } x = 1 \text{을 대입하면, } 13 &= Q(1) + R \\ \therefore Q(1) + R &= 13 \end{aligned}$$

해설

$6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$ 를 $3x - 2$ 로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

46. a, b 는 정수이고, $ax^3 + bx^2 + 1$ 이 $x^2 - x - 1$ 로 나누어 떨어질 때, b 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

$$ax^3 + bx^2 + 1$$

$$= (x^2 - x - 1)(ax - 1)$$

$$= ax^3 - (1+a)x^2 + (1-a)x + 1$$

양변의 계수를 비교하면

$$-(1+a) = b, 1-a = 0$$

$$\therefore a = 1, b = -2$$

47. 다항식 $x^3 + ax + b$ 가 다항식 $x^2 - x + 1$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
 $x^2 = x - 1$ 을 대입하면
 $ax + (b - 1) = 0$
이 등식이 x 에 대한 항등식이므로,
 $a = 0, b - 1 = 0$
 $\therefore a = 0, b = 1$
 $\therefore a + b = 1$

해설

$x^3 + ax + b$
 $= (x^2 - x + 1)Q(x)$
 $= (x^2 - x + 1)(x + b)$
 $\therefore b = 1, a = 0$

48. 다항식 x^3+ax-8 을 x^2+4x+b 로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$ 가 되도록 상수 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8 을 x^2+4x+b 로 직접나눈 나머지는
 $(a-b+16)x+4b-8$
 $(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots㉠$
㉠이 x 에 대한 항등식이므로,
 $a-b+16=3, 4b-8=4$
 $\therefore a=-10, b=3$
 $\therefore a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$ 의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10, b=3, p=-4$ 를 구해도 된다.

49. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176 인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은?

- ① $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$
- ② $\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$
- ③ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- ④ $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$
- ⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

해설

직육면체의 대각선의 길이가 28 이므로
가로를 a , 세로를 b , 높이를 c 라고 했을 때
 $(a^2 + b^2) + c^2 = 28^2$
모든 모서리의 길이의 합이 176 이므로
 $a + b + c = 44$
따라서 ③번과 같은 식을 사용하여 겉넓이를 구할 수 있다.

50. 다항식 $2x^3 + ax^2 + x + b$ 가 $x^2 - x + 1$ 로 나누어떨어질 때, $a - b$ 의 값은?

① -4

② -2

③ 2

④ 3

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & 2x^3 + ax^2 + x + b \\ &= (x^2 - x + 1)(2x + c) \\ &= 2x^3 + (c - 2)x^2 + (2 - c)x + c \\ \therefore & a = c - 2, 1 = 2 - c, b = c \\ & c = 1 \text{ 이므로 } a = -1, b = 1 \\ \therefore & a - b = -2 \end{aligned}$$

51. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 이 $x^2 + 1$ 로 나누어떨어질 때, 상수 a, b 의 값을 정하면?

① $a = -1, b = 3$

② $a = 1, b = 3$

③ $a = 3, b = -1$

④ $a = -3, b = -1$

⑤ $a = 3, b = 1$

해설

$$\begin{aligned} & x^3 + ax^2 + bx + 3 \\ &= (x^2 + 1)(x + c) \\ &= x^3 + cx^2 + x + c \\ \therefore & a = c, b = 1, c = 3 \\ & \text{따라서 } a = 3, b = 1 \end{aligned}$$

52. x 의 다항식 $x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때, 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때,
몫을 $x + q$ 라 하면 (일반적으로 $px + q$ 로 해야겠지만 x^3 의 계수가 1이므로 $x + q$)

$$x^3 + ax + b = (x^2 - 3x + 2)(x + q) + 2x + 1$$

$$\therefore x^3 + ax + b = (x - 2)(x - 1)(x + q) + 2x + 1$$

이 등식은 x 에 관한 항등식이므로

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 + a + b = 2 + 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 8 + 2a + b = 4 + 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a = -5, b = 7$$

$$\therefore a + b = 2$$

53. 다항식 $x^3 - 4x^2 + ax + b$ 가 $x^2 + 2$ 로 나누어 떨어질 때, $3a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 4x^2 + ax + b \\ &= (x^2 + 2)(x - \alpha) \text{라 놓을 수 있다.} \\ x^3 - \alpha x^2 + 2x - 2\alpha &= x^3 - 4x^2 + ax + b \\ \therefore \alpha &= 4, \quad a = 2, \quad b = -8 \\ \therefore 3a + b &= -2 \end{aligned}$$

54. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 이 $x^2 + 1$ 로 나누어떨어질 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^3 + ax^2 + bx + 3 = (x^2 + 1)(x + k)$ 라 할 수 있다.

여기에서 상수항을 비교하면 $k = 3$

$$x^3 + ax^2 + bx + 3 = (x^2 + 1)(x + 3)$$

$$= x^3 + 3x^2 + x + 3$$

$$\therefore a = 3, b = 1 \text{ 이므로 } a + b = 4$$

해설

$$x^3 + ax^2 + bx + 3 = (x^2 + 1)Q(x)$$

$x^2 = -1$ 을 대입하면

$$-x - a + bx + 3 = 0, (b - 1)x + (3 - a) = 0$$

x 에 대한 항등식이므로

$$a = 3, b = 1$$

$$\therefore a + b = 4$$

55. x 에 대한 삼차식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 이 $x^2 + 1$ 로 나누어떨어질 때, 상수 a, b 의 값을 정하면?

① $a = -1, b = 3$

② $a = 1, b = 3$

③ $a = 3, b = -1$

④ $a = -3, b = -1$

⑤ $a = 3, b = 1$

해설

$$\begin{aligned}x^3 + ax^2 + bx + 3 &= (x^2 + 1)(x + c) \\ &= x^3 + cx^2 + x + c\end{aligned}$$

$$\therefore a = c, b = 1, c = 3$$

$$\therefore a = 3, b = 1$$

56. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 을 $x^2 - x - 12$ 로 나눈 나머지가 $14x - 9$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^3 + ax^2 + bx + 3$$

$$= (x^2 - x - 12)Q(x) + 14x - 9$$

$$= (x - 4)(x + 3)Q(x) + 14x - 9$$

$x = 4$, $x = -3$ 을 각각 대입하면

$$16a + 4b + 67 = 47 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$9a - 3b - 24 = -51 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -2$, $b = 3$

$$\therefore a + b = 1$$

57. $x^3 - 4x^2 + ax + b$ 를 $(x + 1)^2$ 으로 나누면 나머지가 7이 될 때, $a + b$ 의 값은?

- ① -12 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 12

해설

직접 나눠본다.

$$\begin{array}{r} x-6 \\ x^2+2x+1 \overline{) x^3-4x^2+ax+b} \\ \underline{-(x^3+2x^2+x)} \\ -6x^2+(a-1)x+b \\ \underline{-(6x^2-12x-6)} \\ (a+11)x+b+6 \end{array}$$

나머지가 7이므로 $a + 11 = 0, b + 6 = 7$

$\therefore a = -11, b = 1$

$\therefore a + b = -10$

해설

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + ax + b &= (x + 1)^2(x + k) + 7 \\ &= x^3 + (k + 2)x^2 + (2k + 1)x + k + 7 \end{aligned}$$

계수들 비교하면

$$\begin{aligned} k + 2 &= -4, 2k + 1 = a, k + 7 = b \\ k &= -6 \text{이므로 } a = -11, b = 1 \\ \therefore a + b &= -10 \end{aligned}$$

58. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 을 $(x-1)^2$ 을 나누었을 때 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로
 $x^3 + ax^2 + bx + 3$
 $= (x-1)^2(x+k) + 2x + 1$
 $= x^3 + (k-2)x^2 + (3-2k)x + k + 1$
양변의 계수를 비교하면
 $a = k - 2, b = 3 - 2k, 3 = k + 1$
 $k = 2$ 이므로 $a = 0, b = -1$
 $\therefore a - b = 0 - (-1) = 1$

59. 다항식 $4x^3 - 2x^2 - 21x + \frac{45}{2}$ 가 $(x-r)^2$ 으로 나누어 떨어질 때, 양수 r 의 값은?

- ① 1.2 ② 1.5 ③ 1.8 ④ 2.1 ⑤ 2.4

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^3 - 2x^2 - 21x + \frac{45}{2} \cdots \textcircled{1} \\ f(x) &= (x-r)^2(4x-\alpha) \\ &= (x^2 - 2rx + r^2)(4x - \alpha) \\ &= 4x^3 - (\alpha + 8r)x^2 + (4r^2 + 2r\alpha)x - r^2\alpha \end{aligned}$$

①과 계수비교를 하면

$$\alpha + 8r = 2 \cdots \textcircled{2}, \quad 4r^2 + 2r\alpha = -21 \cdots \textcircled{3}$$

②에서 $\alpha = 2 - 8r$,

③에 대입하면

$$4r^2 + 2r(2 - 8r) = -21$$
$$12r^2 - 4r - 21 = 0, \quad (2r - 3)(6r + 7) = 0$$
$$\therefore r = \frac{3}{2} \quad (\because r > 0)$$

60. 등식 $x^3 + ax^2 + 2x + b = (x^2 + x + 1)Q(x) + 2x + 1$ 이 x 에 대한
항등식일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$Q(x) = x + c$ 라고 두고 전개하여 계수를 비교하면
 $a = 0, b = 0, c = -1$ 이므로 $a + b = 0$

해설

$x^3 + ax^2 + 2x + b$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 직접 나눗셈을 하면,

$$\begin{array}{r} x^2+x+1 \overline{) \begin{array}{r} x^3+ax^2+2x+b \\ - (x^3+x^2+x) \\ \hline (a-1)x^2+(a-1)x+(a-1) \end{array}} \\ \underline{-(a-1)x^2+(a-1)x+(a-1)} \\ (2-a)x+b-a+1 \end{array}$$

$$2-a=2, b-a+1=1$$

$$a=0, b=0$$

61. 다항식 $x^3 + ax - 8$ 을 $x^2 + 4x + b$ 로 나눈 나머지가 $3x + 4$ 이다. 상수 a, b 의 값을 구하면?

① $a = -10, b = 3$

② $a = 10, b = 3$

③ $a = -10, b = -3$

④ $a = 7, b = 3$

⑤ $a = -5, b = 4$

해설

몫을 $x + c$ 라고 둔다면

$$x^3 + ax - 8 = (x^2 + 4x + b)(x + c) + 3x + 4$$

이차항의 계수 : $c + 4 = 0$ 에서 $c = -4$

상수항 : $bc + 4 = -8$ 에서 $b = 3$

일차항의 계수 : $4c + b + 3 = a$ 에서 $a = -10$

62. 다항식 $f(x)$ 를 다항식 $g(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라 할 때 $f(x)$ 를 $\frac{g(x)}{n}$ 로 나눈 몫과 나머지를 나타낸 것은?

- ① 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $R(x)$ ② 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $R(x)$
 ③ 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $\frac{R(x)}{n}$ ④ 몫 : $Q(x)$, 나머지 $\frac{R(x)}{x}$
 ⑤ 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $nR(x)$

해설

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x) \cdots \textcircled{A}$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{n}Q'(x) + R'(x) \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \text{ 에서 } f(x) = nQ(x)\frac{g(x)}{n} + R(x),$$

$$\frac{Q'(x)}{n} = Q(x), R'(x) = R(x)$$

$$\therefore Q'(x) = n \cdot Q(x), R'(x) = R(x)$$

63. 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 1$ 로 나눈 나머지가 상수일 때, $f(x)$ 의 일차항의 계수는?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$f(x) = (x^2 - 1)(x + a) + r \quad (a, r \text{ 는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 - x - a + r$$

$\therefore$ 일차항의 계수는 -1

64. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $2f(x) - g(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지 $R(x)$ 는 $g(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지와 같다. $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지가 $2x + 4$ 일 때, $R(10)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$$\begin{aligned} 2f(x) - g(x) &= (x^2 + 1)A(x) + R(x) \\ g(x) &= (x^2 + 1)B(x) + R(x) \text{라 둘 수 있다.} \\ \text{따라서 } 2f(x) &= g(x) + (x^2 + 1)A(x) + R(x) \\ &= (x^2 + 1)B(x) + R(x) + (x^2 + 1)A(x) + R(x) \\ &= (x^2 + 1)\{A(x) + B(x)\} + 2R(x) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } f(x) = (x^2 + 1)\frac{1}{2}\{A(x) + B(x)\} + R(x)$$

$$\therefore R(x) = 2x + 4 \text{이고 } R(10) = 24$$

65. x 에 관한 항등식 $x^n(x^2+ax+b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$ 가 성립할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 5

해설

$x^n(x^2+ax+b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$
위의 식에 $x=2$ 를 대입하면, $2^n(4+2a+b) = 0$
 $\therefore b = -2a - 4 (2^n \neq 0) \dots \textcircled{1}$
①을 준식에 대입하면,
 $x^n(x^2+ax-2a-4) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$
 $x^n(x-2)(x+a+2) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$
위의 식이 항등식이므로 다음 식도 항등식이다.
 $x^n(x+a+2) = (x-2)p(x) + 2^n$
다시 $x=2$ 를 대입하면,
 $2^n(4+a) = 2^n \quad \therefore a = -3$
 $a = -3$ 을 ①에 대입하면,
 $b = (-2)(-3) - 4 = 2$
 $\therefore a = -3, b = 2$
 $\therefore a+b = -1$

66. 다항식 $f(x) = x^4 + ax + b$ 가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지도록 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 3 ④ -4 ⑤ -3

해설

$$\begin{aligned} \text{(i) } f(x) &= x^4 + ax + b = (x-1)^2 Q(x) \\ f(1) &= 1 + a + b = 0 \\ \therefore b &= -(a+1) \\ \text{(ii) } f(x) &= x^4 + ax - (a+1) = (x-1)^2 Q(x) \\ (x^4 - 1) + a(x-1) &= (x-1)^2 Q(x) \\ (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + a(x-1) &= (x-1)^2 Q(x) \\ \therefore x^3 + x^2 + x + 1 + a &= (x-1)Q(x) \\ x=1 \text{을 대입하면 } 4 + a &= 0 \quad \therefore a = -4 \\ b = -(a+1) \text{에서 } b &= 3 \\ \therefore a + b &= -1 \end{aligned}$$

67. n 이 자연수일 때 $x^{2n}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x + 2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $4^n(x + 2)$ 가 되도록 a, b 의 값을 정할 때, $a - 2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$$x^{2n}(x^2 + ax + b) = (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2) \cdots \textcircled{1}$$

$x = -2$ 를 대입하면,

$$4^n(4 - 2a + b) = 0 \quad \therefore b = 2a - 4 \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$x^{2n}(x^2 + ax + 2a - 4)$$

$$= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)$$

$$\text{한편, } x^2 + ax + 2a - 4 = x^2 - 4 + a(x + 2)$$

$$= (x + 2)(x - 2) + a(x + 2)$$

$$= (x + 2)(x - 2 + a)$$

$$\therefore x^{2n}(x + 2)(x - 2 + a)$$

$$= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)$$

$$\therefore x^{2n}(x - 2 + a) = (x + 2)Q(x) + 4^n$$

$x = -2$ 를 대입하면

$$4^n(-4 + a) = 4^n \quad \therefore -4 + a = 1 \quad \therefore a = 5$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } b = 6 \quad \therefore a - 2b = -7$$

68. $(4x^2 - 3x + 1)^5(x^3 - 2x^2 - 1)^4$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 512

해설

$(4x^2 - 3x + 1)^5(x^3 - 2x^2 - 1)^4 = ax^{22} + bx^{21} + \cdots + c$
위의 식에 $x = 1$ 을 대입하면, 모든 계수들의 총합이 나온다.
 $\therefore$ (계수의 총합) $= 2^5 \times (-2)^4 = 512$

69. $x^3 - x^2 + 2 = (x + 1)^3 + a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$ 가 항등식일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

조립제법에 의한 방법으로 풀면

-1	1	-1	0	2
		-1	2	-2
-1	1	-2	2	0
		-1	3	
-1	1	-3	5	
		-1		
	1	-4		

$\therefore a = -4, b = 5, c = 0$

$\therefore a + b + c = 1$

해설

주어진 식의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$2 = 1 + a + b + c$

$\therefore a + b + c = 1$

70. $(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)^4(2x - 1)^7$ 을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)^4 \cdot (2x - 1)^7$
 $= a_0x^{19} + a_1x^{18} + a_2x^{17} + \cdots + a_{19}$ 로 놓으면
계수들의 총합 $a_0 + a_1 + \cdots + a_{19}$ 는 양변에 $x = 1$ 을 대입한
결과와 같으므로 항등식의 성질에서
 $(1 + 2 - 3 + 2)^4 \cdot (2 - 1)^7 = 2^4 = 16$

71. n 이 자연수일 때, x 의 정식 $x^n(x^2+ax+b)$ 를 $(x-3)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $3^n(x-3)$ 이 될 때, $a+b$ 의 값은?

- ① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$x^n(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)\cdots\textcircled{1}$$

$$x=3\text{을 대입하면 }3^n(9+3a+b)=0$$

$$\therefore b=-3a-9\cdots\textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$x^n(x^2+ax-3a-9)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$$

$$\therefore (x-3)\{x^n(x+a+3)\}=(x-3)\{(x-3)Q(x)+3^n\}$$

양변을 $x-3$ 으로 나눈 몫을 비교하면

$$x^n(x+a+3)=(x-3)Q(x)+3^n$$

$$x=3\text{을 대입하면 }3^n(6+a)=3^n\therefore 6+a=1\therefore a=-5$$

$$\textcircled{2}\text{에서 }b=6$$

$$\therefore a=-5, b=6\therefore a+b=1$$

72. n 이 자연수일 때, $x^{2n}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x + 2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $4^n(x + 2)$ 가 되도록 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

$$\begin{aligned} \text{(i) } f(x) &= x^{2n}(x^2 + ax + b) \\ &= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2) \end{aligned}$$

$$f(-2) = 4^n(4 - 2a + b) = 0$$

$$\therefore b = 2a - 4$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } f(x) &= x^{2n}(x^2 + ax + 2a - 4) \\ &= x^{2n}(x + 2)(x + a - 2) \\ &= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2) \end{aligned}$$

$$\therefore x^{2n}(x + a - 2) = (x + 2)Q(x) + 4^n$$

$x = -2$ 를 대입하면

$$4^n(-4 + a) = 4^n, -4 + a = 1$$

$$\therefore a = 5$$

$$b = 2a - 4 \text{ 에서 } b = 6$$

$$\therefore a + b = 11$$

73. 모든 실수 x 에 대하여 $(x-1)^{10} = a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + \cdots + a_{10}$ 이 성립할 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ 의 값은? (단, a_i 는 상수, $i = 0, 1, 2, \dots, 10$)

① -2^{10} ② -2^9 ③ 2^9 ④ 2^{10} ⑤ 2^{55}

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0 \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{10} = 2^{10} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{하면 } 2(a_1 + a_3 + \cdots + a_9) = -2^{10}$$

$$\therefore a_1 + a_3 + \cdots + a_9 = -2^9$$

74. x 에 대한 다항식 $(4x^2 - 3x + 1)^5$ 을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 1024

해설

$(4x^2 - 3x + 1)^5$ 을 전개하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면 $(4x^2 - 3x + 1)^5 = a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + \cdots + a_9x + a_{10}$ 과 같이 된다.

여기서 모든 계수들의 합

$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ 을 구하려면

$x = 1$ 을 대입하면 된다.

즉, $(4 - 3 + 1)^5 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$

모든 계수들의 합은 $2^5 = 32$

75. 임의의 실수 x 에 대하여 $x^{11} + x = a_0 + a_1(x+3) + a_2(x+3)^2 + \cdots + a_{11}(x+3)^{11}$ 이 성립할 때, $a_1 + a_3 + \cdots + a_{11}$ 의 값은?

- ① $2^{22} - 2^{11} + 2$ ② $2^{22} + 2^{11} - 2$ ③ $2^{21} - 2^{10} + 1$
 ④ $2^{21} + 2^{10} - 1$ ⑤ $2^{21} + 2^{10} + 1$

해설

주어진 식의 양변에 $x = -2$, $x = -4$ 를 각각 대입하면

$$-2^{11} - 2 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} \cdots \textcircled{1}$$

$$-2^{22} - 4 = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots - a_{11} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{에서 } 2(a_1 + a_3 + \cdots + a_{11}) = 2^{22} - 2^{11} + 2$$

$$\therefore a_1 + a_3 + \cdots + a_{11} = 2^{21} - 2^{10} + 1$$

76. $x^3 + 2x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 x 의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 $a + b + c + d$ 의 값은?

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

양변에 $x = 2$ 를 대입하면
 $8 + 8 - 2 + 1 = a + b + c + d$
 $\therefore a + b + c + d = 15$

해설

- (i) a, b, c, d 의 값을 각각 구하려면 우변을 전개하여 계수비교를 하거나
(ii) 조립제법 : 좌변을 $x - 1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막 몫의 계수가 a 이다.

77. 다항식 $(x^3 + x^2 - 2x - 1)^5$ 을 전개한 식이 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{14}x^{14} + a_{15}x^{15}$ 일 때, $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{14} - a_{15}$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & (x^3 + x^2 - 2x - 1)^5 \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{14}x^{14} + a_{15}x^{15} \\ & \text{양변에 } x = -1 \text{ 을 대입하면} \\ & (-1 + 1 + 2 - 1)^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{14} - a_{15} = 1 \end{aligned}$$

78. 등식 $2x^2 + x + 5 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 가 x 에 대한 항등식일 때 $a + b + c$ 의 값은?

① 12

② 15

③ 18

④ 21

⑤ 24

해설

좌변을 전개하여 계수를 비교해서 a, b, c 를 구할 수 있다.
여기에서는 계수의 합을 구하는 것이므로 양변에 $x = 2$ 를 대입해서 구한다.

$$15 = a + b + c$$

79. x 에 관한 항등식 $(x^2+x+1)^5 = a_{10}(x+1)^{10} + a_9(x+1)^9 + \cdots + a_1(x+1) + a_0$ 에서 $a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + a_{10}$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

주어진 식에 $x = 0$ 을 대입하면

$$(0 + 0 + 1)^5 = a_{10} + a_9 + \cdots + a_1 + a_0$$

$$\therefore a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + a_{10} = 1$$

80. 모든 실수 x 에 대하여 $2x^3 - 3x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 이라 할 때, $a + b + c + d$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$2x^3 - 3x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$$

$x = 2$ 를 대입하면,

$$\{2 \times (2)^3\} - (3 \times 2^2) - 2 + 1 = a + b + c + d$$

$$\therefore a + b + c + d = 3$$

81. 다음 식 $(3x^2 - x + 2)(4x^3 - 5x^2 + x + 1)^5$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합은?

- ① 4 ② -32 ③ -64 ④ 32 ⑤ 64

해설

다항식의 계수들의 총합을 구할 경우

$x = 1$ 을 대입한다.

$$(3 - 1 + 2)(4 - 5 + 1 + 1)^5 = 4 \times 1 = 4$$

82. $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{15}(x-1)^{15}$
일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{15} \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{14}) \text{이다.}$$

$$\therefore a_0 + a_2 + \cdots + a_{14} = 1$$

83. x 에 대한 다항식 $(ax - 1)^3$ 의 전개식에서 모든 항의 계수의 합이 125일 때, 실수 a 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x = 1$ 을 대입하면 계수들의 합을 얻을 수 있다.

즉, $(a - 1)^3 = 125, a - 1 = 5$

$\therefore a = 6$

84. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $2x^3 - 3x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 성립할 때, $a + b + c + d$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수)

- ① -3
- ② -1
- ③ 0
- ④ 3
- ⑤ 5

해설

계수의 합 $a + b + c + d$ 를 구할 때는 우변의 문자부분을 모두 1이 되게 하는 x 값을 양변에 대입하면 간단하게 그 값을 구할 수 있다.

이 문제에서는 $x = 2$ 를 양변에 대입하면

$16 - 12 - 2 + 1 = a + b + c + d$

$\therefore a + b + c + d = 3$

해설

a, b, c, d 의 값을 각각 구하기 위해서는 아래와 같이 조립제법을 사용할 수 있다.

$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$

$= (x-1)[(x-1)\{a(x-1) + b\} + c] + d$

즉, $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

1		2	-3	-1	1	
		2	-1	-2		
1		2	-1	-2	-1	← d
		2	1			
1		2	1	-1	←	c
		2				
		2	3	←	b	
		↑				
		a				

$\therefore a + b + c + d = 3$

85. 임의의 실수 x 대하여 $(1+2x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 항상 성립할 때, $2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ 의 값은?

① 1023 ② 1024 ③ 1025 ④ 2046 ⑤ 2050

해설

$$x = 0 \text{ 대입, } a_0 = 1$$

$$x = 1 \text{ 대입, } 2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$$

$$2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = 1 + 1024 = 1025$$

86. 등식 $(1+x+x^2)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은?

① 28

② 26

③ 15

④ 14

⑤ 13

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$3^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_8 - \textcircled{㉠}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$1^3 = a_0 - a_1 + a_2 + \dots + a_8 - \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} : 26 = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 13$$

87. 모든 실수 x 에 대하여 $x^{10} + 1 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{10}(x-1)^{10}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x = 2$ 을 대입하면

$$2^{10} + 1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{2}$$

① + ②에 의해

$$2^{10} + 2 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10})$$

$$\therefore (a_0 + a_2 + \cdots + a_{10}) = 2^9 + 1 = 513$$

88. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^{100}-1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{100}(x-1)^{100}$ 이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^m+k$ 이다. $m+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 98

해설

$x=0$ 을 대입하면

$$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{100}=-1\cdots\textcircled{1}$$

$x=2$ 를 대입하면

$$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=2^{100}-1\cdots\textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2}: 2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100})=2^{100}-2$$

$$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^{99}-1$$

$$\therefore m=99, k=-1 \text{ 이므로 } m+k=98$$

89. x 에 대한 항등식 $(1+2x-x^2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$ 에서 $3a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}$ 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

i) 항등식의 상수항 : $a_0 = 1$
ii) 항등식에 $x = 1, x = -1$ 을 대입하여 식을 만든다.
 $x = 1$ 을 대입하면 $2^5 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{1}$
 $x = -1$ 을 대입하면 $(-2)^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$: $0 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10})$
 $\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10} = 0$
 $3a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10} = 2(\because a_0 = 1)$

90. x 에 대한 항등식 $(x^2 - x - 1)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$ 에서 $a_1 + a_3 + a_5$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면,

$$-1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_6 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면,

$$1 = a_0 - a_1 + \cdots + a_6 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}: -2 = 2(a_1 + a_3 + a_5)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = -1$$

91. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^{2007} + 1 = a_0 + a_1(x+4) + a_2(x+4)^2 + \cdots + a_{2007}(x+4)^{2007}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007}$ 의 값은?

- ① $(-3)^{2007} + 1$ ② 0 ③ $3^{2007} + 1$
- ④ 1 ⑤ $3^{2007} + 3$

해설

양변에 $x = -3$ 을 대입하면
 $(-3)^{2007} + 1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{2007}$

92. $(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때,

$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2^{24} ④ 2^{25} ⑤ 2^{50}

해설

$$(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$$

$x = 1$ 을 양변에 대입하면

$$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots \textcircled{1}$$

$x = -1$ 을 양변에 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$$

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50} = 0$$

93. 등식 $(1 + 2x - x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20}$ 의 값은?

- ① -2^{10} ② -2^9 ③ 0 ④ 2^9 ⑤ 2^{10}

해설

$(1 + 2x - x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20} \cdots \textcircled{A}$
 $\textcircled{A}$ 은 x 에 대한 항등식이므로 x 에 어떤 실수 값을 대입해도 항상 성립한다.
 $\textcircled{A}$ 의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면
 $2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}$ 의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면
 $(-2)^{10} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{C}$
 $\textcircled{B} + \textcircled{C}$ 을 하면
 $2^{10} + (-2)^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$
 $2 \times 2^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$
 $\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20} = 2^{10}$

94. x 에 대한 다항식 $(1+x-x^2)^{10}$ 을 전개하면 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{20}x^{20}$ 이 될 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}$ 의 값은? (단, a_i 는 상수이고 $i=0, 1, 2, \cdots, 20$)

- ① 2^{10}
- ② $2^{10}-1$
- ③ 2
- ④ 1
- ⑤ 0

해설

$(1+x-x^2)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{20}x^{20}$ 이므로
 $x=1$ 을 대입하면
 $1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{19}+a_{20}\cdots\textcircled{㉠}$
또, 이 식에 $x=-1$ 을 대입하면
 $1=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{19}+a_{20}\cdots\textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}+\textcircled{㉡}$ 을 하면 $2=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20})$
 $\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}=1$

95. $(1 - x - x^2)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{99}x^{99} + a_{100}x^{100}$ 라 할 때,
 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = A$, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = B$ 에 대하여
 $A + 2B$ 의 값을 구하면?

- ① -1
- ② 0
- ③ 1
- ④ 100
- ⑤ 1024

해설

(i) 양변에 $x = 1$ 을 대입하면
 $1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100} \cdots \textcircled{1}$
양변에 $x = -1$ 을 대입하면
 $1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{99} + a_{100} \cdots \textcircled{2}$
(ii) $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 하면 $2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{100})$
 $\therefore a_0 + a_2 + \cdots + a_{100} = 1$
 $\therefore A = 1$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 하면
 $0 = 2(a_1 + a_3 + \cdots + a_{99})$
 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{99} = 0 \quad \therefore B = 0$
 $\therefore A + 2B = 1$