1. 다음 중 식의 전개가 바르지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① $(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$

② $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$

③ $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)=x^4-8x^2+12$

④ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^8-b^8$

⑤ $(a+b-c)(a-b+c)=a^2-b^2-c^2+2bc$

해설

$(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)$

$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)$

$x^2-x=Y$라 놓자.

$$\begin{aligned}(Y-6)(Y-2)&=Y^2-8Y+12\\&=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12\\&=x^4-2x^3-7x^2+8x+12\end{aligned}$$

2. 다음 식 중에서 옳지 않은 것을 고르면?

① $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

② $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

③ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

④ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑤ $(a^2+a+1)(a^2-a+1)=a^4-a^2+1$

해설

⑤ $(a^2+a+1)(a^2-a+1)=(a^2+1)^2-a^2$
$=a^4+a^2+1$

3. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x-y-z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+2x+2y+1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$
② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$
③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$= x^6 - y^6$
⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$
$= x^3 + y^3 - 3xy - 1$

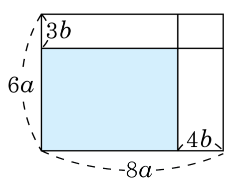
4. 두 다항식 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$, $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하면?

① -21　② -15　③ -5　④ -1　⑤ 0

해설

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서
x^4 항의 계수는 x^3 의 계수와는 관계가 없다.
따라서 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 같다.
$\therefore\ a=b \quad \therefore\ a-b=0$

5. 다음 그림에서 색칠한 직사각형의 넓이는?



① $6a^2 - 7ab + 2b^2$　② $36a^2 - 42ab + 12b^2$

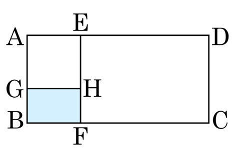
③ $48a^2 - 48ab + 12b^2$　④ $12a^2 - 12ab + 3b^2$

⑤ $48a^2 + 48ab + 12b^2$

해설

$(6a - 3b)(8a - 4b) = 48a^2 - 48ab + 12b^2$

6. 다음 그림의 사각형 AGHE, 사각형 EFCD는 정사각형이고, $\overline{\mathrm{AD}} = a$, $\overline{\mathrm{AB}} = b$ 일때, 사각형 GBFH 의 넓이는?

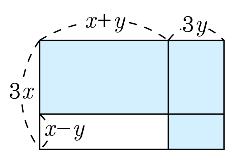


① $a^2 - 2ab - b^2$
② $a^2 + 3b^2 - 2ab$
③ $-a^2 + 3ab - 2b^2$
④ $-a^2 + 3ab - b^2$
⑤ $-a^2 + 2ab - b^2$

해설

$\square\mathrm{GBFH} = \square\mathrm{ABCD} - \square\mathrm{AGHE} - \square\mathrm{EFCD}$
$= ab - (a-b)^2 - b^2 = ab - (a^2 - 2ab + b^2) - b^2$
$= -a^2 + 3ab - 2b^2$

7. 다음 그림의 직사각형에서 색칠한 부분의 넓이를 나타내는 식을 세워 전개하였을 때, y^2 항의 계수는?

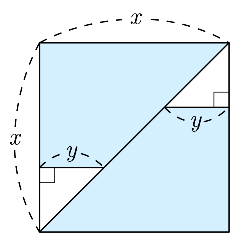


① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$(x+4y)(3x)-(x+y)(x-y)$
$=3x^2+12xy-x^2+y^2$
$=2x^2+12xy+y^2$

8. 다음 그림은 한변의 길이가 x인 정사각형을 대각선을 따라 자른 후 직각이등변삼각형 2개를 떼어낸 도형이다. 이때, 색칠한 부분의 넓이를 x, y에 관한 식으로 나타내어라.



① $xy - y^2$　　② $x^2 - y^2$　　③ $x^2 - y$

④ $\dfrac{xy - y^2}{2}$　　⑤ $\dfrac{x - y}{2}$

해설

$x^2 - 2 \times \dfrac{1}{2} \times y \times y = x^2 - y^2$

9. 0이 아닌 세수 x, y, z에 대하여 x, y, z중 적어도 하나는 6이고, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$일 때, $2(x+y+z)$의 값을 구하면?

① 6　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

해설

x, y, z중 적어도 하나가 6이므로,

$(x-6)(y-6)(z-6)=0$

$\therefore\ xyz-6(xy+yz+zx)+36(x+y+z)-216=0\ \cdots$①

또, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6},\ \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ 6(xy+yz+zx)=xyz\ \cdots$②

①, ②에서

$36(x+y+z)=216$

$\therefore\ 2(x+y+z)=12$

10. 다항식 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x^2+1) = x^4+5x^2+3$을 만족시킨다. $f(x^2-1)$을 구한 것은?

① x^4+5x^2+1 ② x^4+x^2-3 ③ x^4-5x^2+1
④ x^4+x^2+3 ⑤ 답 없음

해설

$x^2+1=t$라 하면 $x^2=t-1$
주어진 식에 대입하면
$f(t)=(t-1)^2+5(t-1)+3$
$\therefore\ f(t)=t^2+3t-1$
$$\begin{aligned} f(x^2-1) &= (x^2-1)^2+3(x^2-1)-1 \\ &= x^4+x^2-3 \end{aligned}$$

11. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

④ $a=b$인 이등변삼각형

⑤ $b=c$인 이등변삼각형

해설

$\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$에서

$(a-b+c)(a-b-c) = (a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) = 0$

(좌변)

$= \{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$= (a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

$= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2$

따라서, $2a^2 + 2b^2 - 2c^2 = 0$이므로 $a^2 + b^2 = c^2$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

12. $(10^5+2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 26 ⑤ 28

해설

준식을 전개하면
$10^{15}+2^3+3\times2\times10^5(10^5+2)$
$=10^{15}+2^3+6\times10^{10}+12\times10^5$
$=10^{15}+10^{10}\times6+10^5\times12+8$
$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

13. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

준 식은 $(a - b)^3$ 이다.

$a - b = 2004 - 2001 = 3$

$\therefore (a - b)^3 = 3^3 = 27$

14. $99 \times 101 \times (100^2 + 100 + 1) \times (100^2 - 100 + 1)$ 을 계산하면?

① $100^6 - 1$ ② $100^6 + 1$ ③ $100^9 - 1$
④ $100^9 + 1$ ⑤ 1

해설

$100 = a$로 치환 하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (a-1)(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)\\ &= \left(a^3-1\right)\left(a^3+1\right)\\ &= a^6-1\\ &= 100^6-1\end{aligned}$$

15. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005=x$ 로 놓으면

$$(\text{준 식})=\frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}$$
$$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$=x+1$$
$$=2006$$

16. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형　② 이등변삼각형
③ 정삼각형　④ 직각이등변삼각형
⑤ 둔각삼각형

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 에서 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)=0$

$\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$ 이고,

$a,\ b,\ c$ 는 실수이므로, $a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

17. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c)+(c+a)(c-a)$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형　② 이등변삼각형　③ 정삼각형
④ 예각삼각형　⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c)+(c+a)(c-a)$에서
$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\} = b^2+2bc+c^2-a^2$
$a^2-(b-c)^2 = -a^2+b^2+c^2+2bc$
$2a^2 = 2b^2+2c^2$
$\therefore\ a^2 = b^2+c^2$
따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

18. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle\mathrm{ABC}$에 대하여 $a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$인 관계가 성립할 때, $\triangle\mathrm{ABC}$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$에서 $a^2-ab+b^2=ac+bc-c^2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, $\triangle\mathrm{ABC}$는 정삼각형이다.

19. $x^2-x-1=0$일 때, $x^3-\frac{1}{x^3}$의 값과 $y+\frac{1}{y}=1$일 때, $\frac{y^{10}+1}{y^2}$의 값은?

① 4, −1　② 4, 18　③ 8, −1　④ 9, −1　⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2-x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$$x-1-\frac{1}{x}=0$$

$$\therefore\ x-\frac{1}{x}=1$$

$$\therefore\ x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3x\cdot\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$=1^3+3\cdot1\cdot1=4$$

(2) $y+\frac{1}{y}=1$일 때

$y+\frac{1}{y}=1$에서 $\frac{y^2+1}{y}=1$

$\therefore\ y^2-y+1=0\cdots\cdots$ ㉠

양변에 $(y+1)$을 곱하면 $(y+1)(y^2-y+1)=0$

$y^3+1=0\ \therefore\ y^3=-1\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{y^{10}+1}{y^2}=\frac{(y^3)^3\cdot y+1}{y^2}=\frac{-y+1}{y^2}$$

$$=\frac{-y^2}{y^2}=-1$$

20. 실수 x가 $x^2-3x+1=0$을 만족할 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값을 구하면?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

준식의 양변을 x로 나누면

$x+\dfrac{1}{x}=3$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=3^3-3\times3=18$$

21. $x+\dfrac{1}{x}=3$ 일 때, $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 의 값과 $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ 의 값을 차례대로 구하면? (단, $x>0$)

① 5, 6　　② 7, 18　　③ 8, 16
④ 9, 18　　⑤ 10, 27

해설

$x+\dfrac{1}{x}=3$ 일 때

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=27-9=18$

22. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=14(x>0)$ 일 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ 의 값은?

① 36 ② 44 ③ 52 ④ 68 ⑤ 82

해설

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x+\dfrac{1}{x})^2-2$ 이므로

$x+\dfrac{1}{x}=4\ (\because x>0)$

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=(x+\dfrac{1}{x})^3-3(x+\dfrac{1}{x})=52$

23. $x^2+x+1=0$일 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

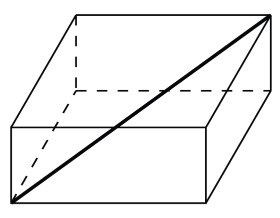
$x^2+x+1=0$에서 양변을 x로 나누면

$x+\frac{1}{x}=-1$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=-1-3\cdot(-1)=2$

24. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3이고 겉넓이가 16, 부피가 6인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c라 할 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?



① 12　② 18　③ 21　④ 23　⑤ 30

해설

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3,\ abc=6,\ 2(ab+bc+ca)=16$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$(a+b+c)^2=25,\ a+b+c=5$($\because$ a,b,c는양수)

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\ \cdots$①

①에 각각 대입하면

$a^3+b^3+c^3-18=5\times(9-8)$

$a^3+b^3+c^3=23$

25. $a-b=1$이고, $a^2+b^2=-1$일 때, $a^{14}+b^{20}$의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$b=a-1$을 $a^2+b^2=-1$에 대입하면
$a^2-a+1=0$에서 $a^3=-1$
$a=b+1$을 $a^2+b^2=-1$에 대입하면
$b^2+b+1=0$에서 $b^3=1$

$$\begin{aligned} a^{14}+b^{20} &= (a^3)^4 \times a^2 + (b^3)^6 \times b^2 \\ &= a^2+b^2=-1 \end{aligned}$$

26. $x^2-x+1=0$일 때, $x^5+\frac{1}{x^5}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2-x+1=0$, 양변에 $x+1$을 곱하면,

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^3+1=0$, $x^3=-1$에서 $x^5=x^3\times x^2=-x^2$

$x^5+\frac{1}{x^5}=-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\cdots$①

$x^2-x+1=0$를 x로 나누어 정리한다.

$x+\frac{1}{x}=1$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=-1$

① 에 대입하면, $x^5+\frac{1}{x^5}=1$

27. $x+y=2,\ x^3+y^3=14$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $xy=-1$ ② $x^2+y^2=6$ ③ $x^4+y^4=34$

④ $x^5+y^5=86$ ⑤ $x^6+y^6=198$

해설

① $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ 에서
$14=2^3-3xy\times 2$
$\therefore\ xy=-1$

② $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 에서
$x^2+y^2=2^2-2(-1)=6$

③ $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$ 에서
$x^4+y^4=6^2-2(-1)^2=34$

④ $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$ 에서
$x^5+y^5=6\times 14-(-1)^2\times 2=82\neq 86$

⑤ $x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$ 에서
$x^6+y^6=14^2-2(-1)^3=198$

28. $a(a+1)=1$일 때, $\dfrac{a^4-a^2}{a^6-1}$의 값은?

① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{1}{4}$　⑤ $\dfrac{1}{5}$

해설

$a(a+1)=1$에서

$a^2=-a+1$

$$\begin{aligned}a^4&=(-a+1)^2=a^2-2a+1\\&=(-a+1)-2a+1=-3a+2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^6&=a^4\times a^2=(-3a+2)(-a+1)\\&=3a^2-5a+2=3(-a+1)-5a+2\\&=-8a+5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{a^4-a^2}{a^6-1}&=\frac{-3a+2-(-a+1)}{-8a+5-1}\\&=\frac{-2a+1}{-8a+4}=\frac{-2a+1}{4(-2a+1)}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

29. $x+\frac{1}{x}=1$ 일 때, $x^{101}+\frac{1}{x^{101}}$ 의 값은?

① 1　　② -1　　③ -2　　④ 2　　⑤ 101

해설

$x+\frac{1}{x}=1$에서 $x^2+1=x$

$\therefore\ x^2-x+1=0,\ x^3=-1$

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= (x^3)^{33}\cdot x^2+\frac{1}{(x^3)^{33}\cdot x^2}\\ &= -x^2+\frac{-1}{x^2}=-\frac{x^4+1}{x^2}=-\frac{-x+1}{x^2}\\ &= \frac{x-1}{x^2}=1\end{aligned}$$

30. $x+y=2,\ x^3+y^3=14$ 일 때, x^5+y^5 의 값을 구하면?

① 12　　② 32　　③ 52　　④ 82　　⑤ 102

해설

$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)\cdots(*)$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$\therefore\ 14=8-6xy$

$\therefore\ xy=-1\cdots\cdots$①

$x^3+y^3=14\cdots\cdots$②

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4-2(-1)=6\cdots\cdots$③

①, ②, ③을 $(*)$에 대입하면

$x^5+y^5=6\times14-2=82$

31. $x-y=1$ 이고 $x^2+y^2=-1$ 일 때, $x^{10}+y^{13}$ 의 값은 얼마인가?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$x-y=1$ 에서 $y=x-1$
이것을 $x^2+y^2=-1$ 에 대입하면
$2x^2-2x+2=0$
$x^2-x+1=0$
양변에 $x+1$ 을 곱하면, $x^3+1=0$
$\therefore\ x^3=-1$
또 $x=y+1$ 을 $x^2+y^2=-1$ 에 대입하면
$2y^2+2y+2=0,\ y^2+y+1=0\ \therefore\ y^3=1$
$\therefore\ x^{10}+y^{13}=(x^3)^3\cdot x+(y^3)^4\cdot y$
$=(-1)^3\cdot x+1^4\cdot y$
$=-(x-y)=-1$

32. $a+b=1,\ a^2+b^2=-1$일 때, $a^{2000}+b^{2006}$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$a+b=1$에서 $b=1-a$이고 $a^2+b^2=-1$이므로
$a^2+(1-a)^2=-1,\ 2a^2-2a+2=0,\ a^2-a+1=0$
이 식의 양변에 $a+1$을 곱하면
$(a+1)(a^2-a+1)=0,\ a^3+1=0$
같은 방법으로 하면
$b^3+1=0$이므로 $a^3=-1,\ b^3=-1$
$\therefore a^{2000}+b^{2006}=(a^3)^{666}\cdot a^2+(b^3)^{668}\cdot b^2$
$=a^2+b^2=-1$

33. $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=4$ 일 때, $x^4+y^4+z^4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$
$0 = 4+2(xy+yz+zx)$
$\therefore\ xy+yz+zx = -2$

$(xy+yz+zx)^2$
$= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(xy^2z+xyz^2+x^2yz)$
$= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$
$4 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+0$
$\therefore\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = 4$

$(x^2+y^2+z^2)^2 = x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$
$16 = x^4+y^4+z^4+2\cdot 4$
$\therefore\ x^4+y^4+z^4 = 8$

34. $a+b=1$ 이고 $a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{2005}+b^{2005}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$b=1-a$ 를 a^2+b^2 에 대입하여 정리하면
$a^2-a+1=0$ $(a+1)(a^2-a+1)=0$
$a^3+1=0$ $\therefore$ $a^3=-1$
마찬가지 방법으로 $b^3=-1$
$a^{2005}+b^{2005}=(a^3)^{668}\cdot a+(b^3)^{668}\cdot b=a+b=1$

해설

a^3, b^3 의 값을 다음과 같이 구해도 된다.
$a^2-a+1=0$ 에서 $a^2=a-1$
$a^3=a^2\cdot a=(a-1)\cdot a=a^2-a=-1$
마찬가지 방법으로 $b^3=-1$

35. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=7$, $x+y=3$ 일 때, x^5+y^5 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 123

해설

$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$ 에서 $3^2 = 7+2xy,\ xy = 1$

$(x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y)$ 에서 $x^3+y^3 = 18$

$$\begin{aligned} x^5+y^5 &= (x^2+y^2)(x^3+y^3) - x^2y^2(x+y) \\ &= 7 \times 18 - 1^2 \times 3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

36. $a+b=4$, $a^2+b^2=10$일 때, a^5+b^5의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 244

해설

$a+b=4$, $a^2+b^2=10$

$ab=\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}=3$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=28$

$\therefore\ a^5+b^5=(a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)$

$=28\times10-9\times4$

$=244$

37. $x+\frac{1}{x}=1$일때, $x^5+\frac{1}{x^5}$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 7

해설

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=1-2=-1$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{1}\right)=1-3=-2$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^5+\frac{1}{x^5}+x+\frac{1}{x}$

$(-1)\times(-2)=x^5+\frac{1}{x^5}+1$

$\therefore\ x^5+\frac{1}{x^5}=1$

해설

$x+\frac{1}{x}=1$의 양변에 x를 곱하면

$x^2-x+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$,

$x^3+1=0$, $x^3=-1$, $\frac{1}{x^3}=-1$

$x^5+\frac{1}{x^5}=-x^2-\frac{1}{x^2}=-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

$=-(-1)=1$

38. $x-\frac{1}{x}=1$일 때, $x^5+\frac{1}{x^5}$의 값은?

① $\pm 6\sqrt{5}$ ② $\pm 5\sqrt{5}$ ③ $\pm 3\sqrt{5}$
④ $\pm 2\sqrt{5}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$에서

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=3$에서

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=5$

$\therefore\ x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{5}$

$$\begin{aligned}x^3+\frac{1}{x^3}&=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=\pm 5\sqrt{5}-3(\pm\sqrt{5})=\pm 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$\therefore\ x^5+\frac{1}{x^5}=3(\pm 2\sqrt{5})-(\pm\sqrt{5})=\pm 5\sqrt{5}$