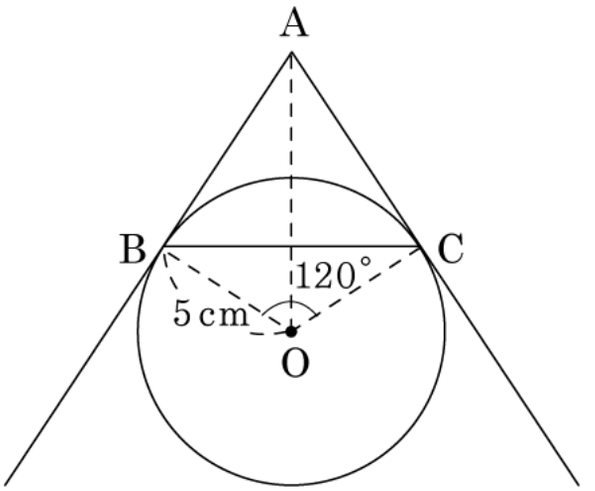
1. 다음 그림에서 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 는 원 O 의 접선이고 두 점 B, C 는 원 O 의 접점이다. $\angle BOC = 120°$, $\overline{BO} = 5cm$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?



① $\overline{AB} = \overline{AC}$

② $\overline{AO} = 12cm$

③ $\angle OBA = \angle OCA$

④ $\angle BAO = 30°$

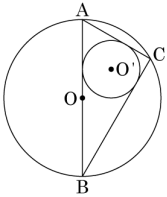
⑤ $\triangle OAB \equiv \triangle OAC$

해설

$\angle BAO = 30°$ 이므로

$1 : 2 = 5 : \overline{AO}$ $\therefore \overline{AO} = 10\,cm$

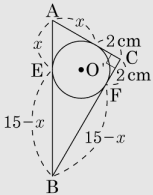
2. 다음 그림에서 $\triangle ABC$ 의 외접원의 지름의 길이는 15cm 이고 내접원의 지름의 길이는 4cm 이다. $\overline{AB}$ 가 외접원의 지름일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하면? (단, $\angle C$ 는 직각이다.)



① 31cm^2 ② 32cm^2 ③ 33cm^2

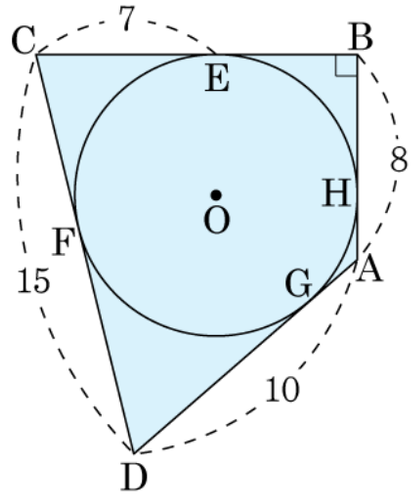
④ 34cm^2 ⑤ 35cm^2

해설



$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \frac{1}{2}\times 2\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})\\ &= \frac{1}{2}\times 2\times(15\times 2+2\times 2)\\ &= \frac{1}{2}\times 2\times 34\\ &= 34(\text{cm}^2)\end{aligned}$$

3. 다음 그림과 같이 사각형 ABCD는 원 O의 외접사각형이고 점 E, F, G, H 는 접점이다. 이 때, $\angle B = 90°$ 이고 $\overline{AB} = 8$, $\overline{CD} = 15$, $\overline{AD} = 10$ 일 때, 원 O 의 반지름은?

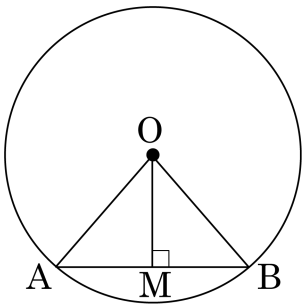


① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

외접사각형의 성질에 의해 $15 + 8 = 10 + \overline{BC}$ $\therefore \overline{BC} = 13$
따라서 $\overline{BE} = 6$ 이다.
이 때, 원의 중심에서 두 접점 E, H 에 선을 그으면 원의 반지름과 접선은 수직으로 만나므로
사각형 BEOH 는 정사각형이 된다.
그러므로 원의 반지름은 6 이다.

4. 다음은 원의 중심에서 현에 수선을 그었을 때, 그 현이 이등분됨을 설명한 것이다. ( ) 안에 알맞은 것을 순서대로 나열하면?



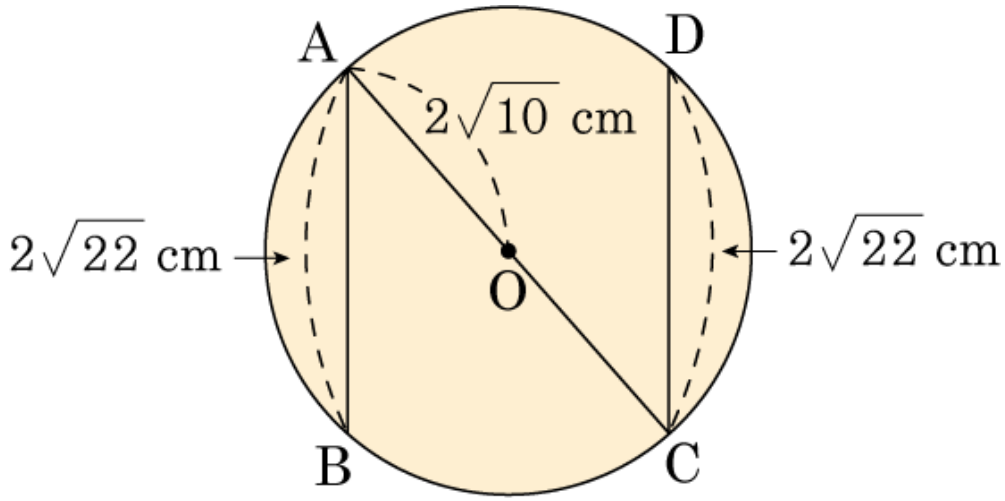
△OAM 과 △OBM 에서
$\overline{OA}$ = (㉠) (∵ 원의 반지름)
∠OMA = ∠OMB = 90°
$\overline{OM}$ 은 공통이므로 △OAM ≡ (㉡)
∴ $\overline{AM}$ = (㉢)
따라서 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

① ㉠ $\overline{OB}$ ㉡ △OAB ㉢ $\overline{BM}$
② ㉠ $\overline{OM}$ ㉡ △OBM ㉢ $\overline{BM}$
③ ㉠ $\overline{OB}$ ㉡ △OBM ㉢ $\overline{AB}$
④ ㉠ $\overline{OB}$ ㉡ △OBM ㉢ $\overline{BM}$
⑤ ㉠ $\overline{AB}$ ㉡ △OBM ㉢ $\overline{BM}$

해설

△OAM 과 △OBM 에서 $\overline{OA}$ = $\overline{OB}$ (∵ 원의 반지름), ∠OMA = ∠OMB = 90° ,
$\overline{OM}$ 은 공통이므로 △OAM ≡ △OBM
∴ $\overline{AM}$ = $\overline{BM}$

5. 반지름의 길이가 $2\sqrt{10}$cm 인 원 O 에서 평행인 두 현 AB 와 CD 의 길이가 모두 $2\sqrt{22}$cm 이다. 이 때, 두 현 사이의 거리는?



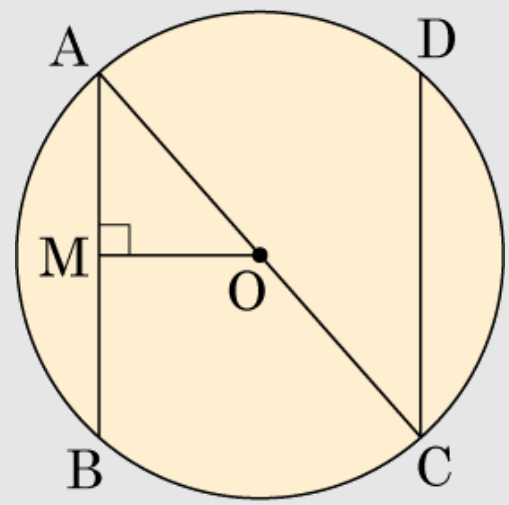
① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$cm ② $3\sqrt{2}$cm ③ $6\sqrt{2}$cm

④ 6cm ⑤ $2\sqrt{11}$cm

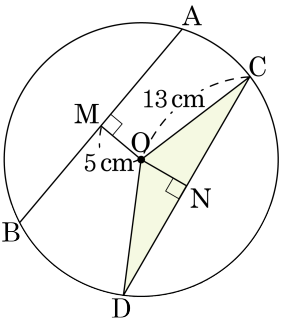
해설

$\overline{AM} = \sqrt{22}$cm, $\overline{MO} = x$ cm 이면 두 현 사이의 거리는 $2x$cm 이다. $\triangle AMO$ 에서 $x = \sqrt{\left(2\sqrt{10}\right)^2 - \left(\sqrt{22}\right)^2} = \sqrt{40-22} = 3\sqrt{2}\,(\text{cm})$

$\therefore$ (두 현 사이의 거리) $= 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\,(\text{cm})$



6. 다음 그림의 원 O 에서 색칠한 부분의 넓이는? (단, $\overline{AB} = \overline{CD}$)



① 35cm^2 ② 40cm^2 ③ 52cm^2

④ 60cm^2 ⑤ 72cm^2

해설

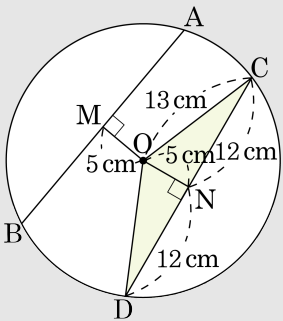
$\overline{AB} = \overline{CD}$ 이므로 $\overline{OM} = \overline{ON} = 5\text{cm}$ 이다.

피타고라스 정리에 의해

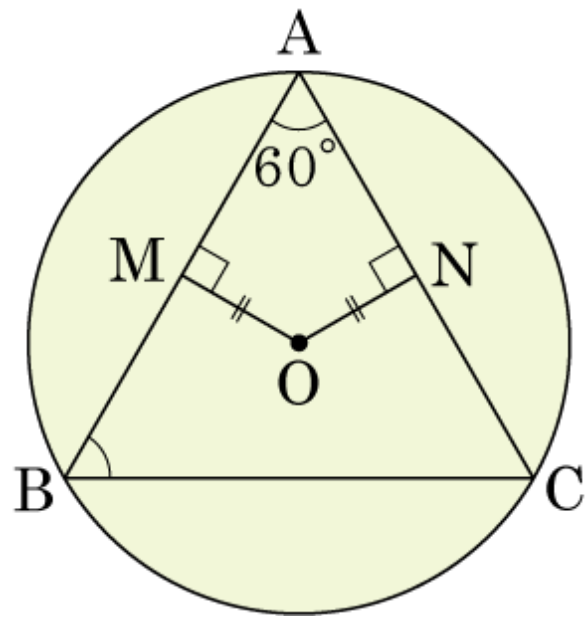
$\overline{CN} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

또한, $\overline{CN} = \overline{DN} = 12\text{cm}$

$\therefore \triangle OCD = \frac{1}{2} \times 24 \times 5 = 60(\text{cm}^2)$



7. 다음 그림과 같이 원의 중심 O 와 두 현 AB, AC 사이의 거리가 같고 $\overline{AB} = 6\text{cm}$, $\angle BAC = 60°$ 이다. 이 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?



① $4\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ ② $6\sqrt{2}\,\text{cm}^2$ ③ $9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

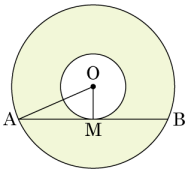
④ $12\sqrt{2}\,\text{cm}^2$ ⑤ $12\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

해설

$\overline{OM} = \overline{ON} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AC}$ 이다.
그런데, $\angle A = 60°$ 이므로 모든 각의 크기가 $60°$ 로 같다.
따라서 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.

$$\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \text{ 이다.}$$

8. 다음 그림에서 두 원의 중심이 점 O 로 같고, 색칠한 부분의 넓이가 $48\pi\text{cm}^2$ 일 때, 작은 원에 접하는 $\overline{AB}$ 의 길이는?



① $8\sqrt{3}\text{cm}$ ② $4\sqrt{3}\text{cm}$ ③ $8\sqrt{3}\pi\text{cm}$

④ $4\sqrt{3}\pi\text{cm}$ ⑤ $6\sqrt{3}\text{cm}$

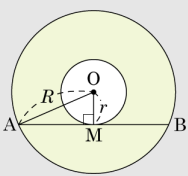
해설

큰 원의 반지름을 R , 작은 원의 반지름을 r 이라 두면, $\text{R} = \overline{\text{OA}}, \text{r} = \overline{\text{OM}}$ 이다.

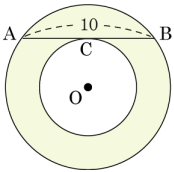
(색칠한 부분의 넓이) $= \pi\left(R^2 - r^2\right) = 48\pi$ 이므로 $R^2 - r^2 = 48$

$\overline{\text{AM}} = \sqrt{\overline{\text{OA}^2} - \overline{\text{OM}^2}} = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$\overline{\text{AB}} = 2\overline{\text{AM}} = 2 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}(\text{cm})$

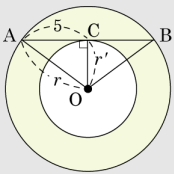


9. 다음 그림과 같이 두 개의 동심원이 있다. 큰 원의 현 AB 가 작은 원에 접하고, $\overline{AB} = 10$ 일 때, 색칠한 부분의 넓이는?



① 10π ② 15π ③ 20π ④ 25π ⑤ 30π

해설



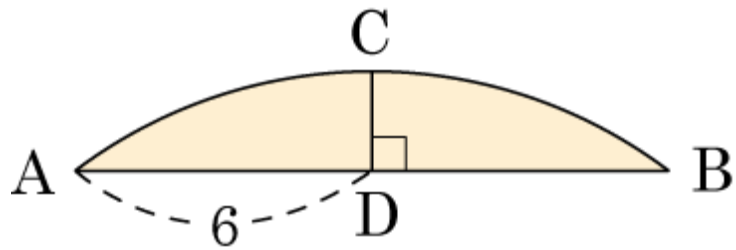
큰 원의 반지름의 길이를 r , 작은 원의 반지름의 길이를 r' 라고 하자.

$\overline{AB}$ 는 작은 원의 접선이므로 $\overline{OC} \perp \overline{AB}$, $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 5$ 이다.

직각삼각형 $\triangle ACO$ 에서 $r^2 - r'^2 = 5^2$ 이다.

색칠한 부분의 넓이$= \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi(r^2 - r'^2) = 25\pi$ 이다.

10. 다음 그림에서 5.0pt$\overset{\frown}{AB}$ 는 반지름의 길이가 10 인 원의 일부분이다. $\overline{AD} = 6$ 일 때, $\overline{CD}$ 의 길이는?



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

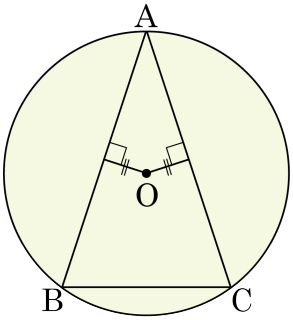
원의 중심 O 과 점 D , 점 A를 연결한다.

△AOD 에서

$\overline{OD} = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AD^2}} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

$\therefore \overline{CD} = \overline{OC} - \overline{OD} = 10 - 8 = 2$

11. 다음 그림의 원 O 에서 $5.0\text{pt}\overset{\frown}{\text{BC}} = 10\pi$, $\angle\text{BAC} = 30^\circ$ 일 때, $5.0\text{pt}\overset{\frown}{\text{AC}}$ 의 길이는?



① 15π ② 18π ③ 22π ④ 25π ⑤ 30π

해설

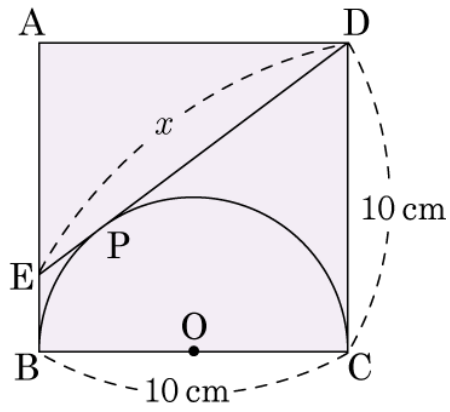
원의 중심에서 현이 이르는 거리가 같으면 두 현의 길이가 같으므로 $\overline{\text{AB}} = \overline{\text{AC}}$ 인 이등변 삼각형이다.
$\angle\text{A} = 30^\circ$ 이므로 $\angle\text{ABC} = 75^\circ$
또한 원주각의 크기에 호의 길이는 비례하므로

$$5.0\text{pt}\overset{\frown}{\text{BC}} : 5.0\text{pt}\overset{\frown}{\text{AC}} = \angle\text{BAC} : \angle\text{ABC}$$

$$10\pi : 5.0\text{pt}\overset{\frown}{\text{AC}} = 30^\circ : 75^\circ$$

$\therefore 5.0\text{pt}\overset{\frown}{\text{AC}} = 25\pi$

12. 다음 그림에서 □ABCD 는 한 변의 길이가 10cm 인 정사각형이다. $\overline{DE}$ 가 $\overline{BC}$ 를 지름으로 하는 원에 접할 때, $\overline{DE}$ 의 길이는?



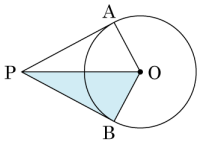
① $\frac{24}{2}$cm ② $\frac{25}{2}$cm ③ 13cm
④ $\frac{27}{2}$cm ⑤ 14cm

해설

$\overline{EP} = \overline{EB} = x - 10$
$\overline{AE} = 10 - (x - 10) = 20 - x$

△AED 에서
$\overline{DE^2} = \overline{AE^2} + \overline{DA^2}$
$x^2 = (20 - x)^2 + 10^2$
$40x = 500$
$x = \frac{25}{2}$ cm

13. 다음 그림에서 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ 는 원 O 의 접선이고 $\overline{OP} = 9\text{cm}$, $\overline{OA} = 5\text{cm}$ 일 때, $\triangle OPB$ 의 넓이는?



① $5\sqrt{7}\text{cm}^2$ ② $5\sqrt{14}\text{cm}^2$ ③ $\frac{5\sqrt{14}}{2}\text{cm}^2$

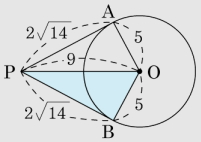
④ $2\sqrt{14}\text{cm}^2$ ⑤ $10\sqrt{7}\text{cm}^2$

해설

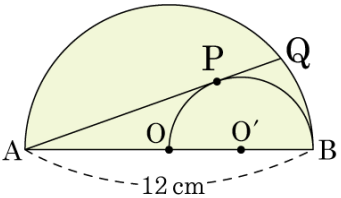
$\overline{OA} = \overline{OB} = 5\text{cm}$ 이고, $\overline{OB} \perp \overline{PB}$ 이므로 $\triangle OPB$ 는 직각삼각형이다.

$\overline{PA} = \sqrt{9^2 - 5^2} = 2\sqrt{14}(\text{cm})$

$\overline{PA} = \overline{PB}$이므로 $\triangle OPB = 2\sqrt{14} \times 5 \times \frac{1}{2} = 5\sqrt{14}(\text{cm}^2)$



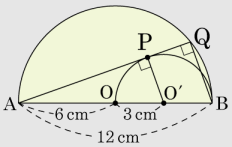
14. $\overline{AB} = 12\text{cm}$ 를 지름으로 하는 반원 O 안에 $\overline{OB}$ 를 지름으로 하는 반원 O′ 이 있다. $\overline{AQ}$ 가 반원 O′ 의 접선이며 점 P 가 접점이라 할 때, $\overline{AQ}$ 의 길이는?



① $6\sqrt{5}\text{cm}$ ② $6\sqrt{6}\text{cm}$ ③ $7\sqrt{5}\text{cm}$

④ $8\sqrt{2}\text{cm}$ ⑤ $8\sqrt{3}\text{cm}$

해설



$\overline{AO'}^2 + \overline{O'P}^2 = \overline{AP}^2$ 이므로

$9^2 = 3^2 + \overline{AP}^2$ $\therefore \overline{AP} = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$

$\angle APO' = 90°$, 지름에 대한 원주각인 $\angle Q = 90°$

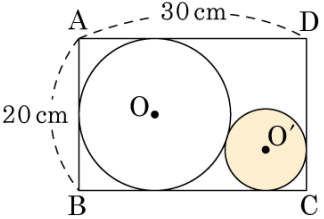
$\therefore \triangle AO'P \backsim \triangle ABQ$

$\overline{AP} : \overline{AQ} = \overline{AO'} : \overline{AB}$

$6\sqrt{2} : \overline{AQ} = 9 : 12 = 3 : 4$

$\therefore \overline{AQ} = \frac{4}{3} \times 6\sqrt{2} = 8\sqrt{2}(\,\text{cm})$

15. 다음 그림에서 원 O 는 직사각형 ABCD 에 내접하는 큰 원이고 원 O′ 은 그 나머지 부분에 내접하는 작은 원이다. 원 O′ 의 넓이는?

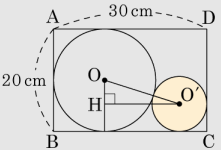


① $400(10-17\sqrt{3})\text{cm}^2$ ② $400(7-4\sqrt{3})\text{cm}^2$

③ $420(10-19\sqrt{3})\text{cm}^2$ ④ $400(100-20\sqrt{3})\text{cm}^2$

⑤ $410(10-21\sqrt{3})\text{cm}^2$

해설



그림과 같이 보조선을 그어 $\triangle O'OH$ 에서

$\overline{OO'} = 10 + x$

$\overline{OH} = 10 - x$

$\overline{O'H} = 20 - x$

$\overline{OO'}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{O'H}^2$ 에서

$(10+x)^2 = (10-x)^2 + (20-x)^2$

$x^2 - 80x + 400 = 0$

$x = 40 \pm 20\sqrt{3}$

x 는 30 보다 작으므로 $x = (40 - 20\sqrt{3})$ cm 이다.

$\therefore$ (원 O′ 의 넓이)$= \pi(40-20\sqrt{3})^2 = 400(7-4\sqrt{3})(\text{cm}^2)$