

1. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$ 일 때, $2A + B$ 를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\ &= (2a + 4b) + (2a + 3b) \quad \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b + 2a) + 3b \quad \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a + 4b) + 3b \quad \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a + 2a) + (4b + 3b) \quad \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2 + 2)a + (4 + 3)b \quad \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b \end{aligned}$$

▶ 답:

▶ 정답: ㉢

해설

$$\text{㉢ } 2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b): \text{ 결합법칙}$$

2. 다항식 $A = 2x^3 - 7x^2 - 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x - 1$, 나머지가 $-7x - 2$ 이다. 다항식 $B = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

- ① 3 ② 6 ③ 9 ④ 14 ⑤ 17

해설

$$A = 2x^3 - 7x^2 - 4 = B(2x - 1) - 7x - 2 \text{ 이다.}$$

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = B(2x - 1)$$

좌변을 $2x - 1$ 로 나누면

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x - 1)(x^2 - 3x + 2)$$

$$\therefore B = x^2 - 3x + 2$$

3. $(1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+6x^5+7x^6)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는?

- ① 0 ② 2 ③ -2 ④ 4 ⑤ -4

해설

x^3 을 만들 수 있는 것은
(3차항) \times (상수항), (2차항) \times (1차항)
2쌍씩이다.
 $4 \times 1 \times 2 + (-3) \times 2 \times 2 = 8 + (-12) = -4$

4. 등식 $x^3 + x - 1 = (x-a)(x-b)(x-c)$ 가 항등식일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 5 ③ 3 ④ 7 ⑤ -7

해설

$$\begin{aligned}x^3 + x - 1 &= (x-a)(x-b)(x-c) \\ &= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc \\ \therefore a+b+c &= 0, ab+bc+ca = 1, abc = 1 \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc & \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca) \\ \therefore a^3 + b^3 + c^3 &= 3\end{aligned}$$

5. $\frac{2x+3a}{4x+1}$ 가 x 에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$ 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $12a = 2$

해설

$\frac{2x+3a}{4x+1} = k$ (일정값 = k)라 놓으면 $2x+3a = k(4x+1)$ 에서

$$(2-4k)x + 3a - k = 0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로,

$$2-4k = 0, 3a - k = 0$$

$$k = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } 3a = k \text{ 에서 } a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 12a = 2$$

6. $\frac{2x+ay-b}{x-y-1}$ 가 $x-y-1 \neq 0$ 인 어떤 x, y 의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$$\frac{2x+ay-b}{x-y-1} = k \text{라 놓으면}$$

$$2x+ay-b = k(x-y-1)$$

x, y 에 대하여 정리하면,

$$(2-k)x + (a+k)y - b + k = 0$$

위의 식이 x, y 에 대한 항등식이어야 하므로

$$2-k=0, a+k=0, -b+k=0$$

$$\therefore k=2, a=-2, b=2$$

$$\therefore a-b = -4$$

7. 등식 $2x^2 + x + 5 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 가 x 에 대한 항등식일 때 $a + b + c$ 의 값은?

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

해설

좌변을 전개하여 계수를 비교해서 a, b, c 를 구할 수 있다.
여기에서는 계수의 합을 구하는 것이므로 양변에 $x = 2$ 를 대입해서 구한다.

$$15 = a + b + c$$

8. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x-1$ 로 나누면 나누어떨어지고, $x+2$ 로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, $m-n$ 의 값은?

① -2 ② -3 ③ -4 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}x^3 + mx^2 + nx + 1 &= (x-1)Q(x) \\ &= (x+2)Q'(x) + 3\end{aligned}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 + m + n + 1 = 0$$

$$\therefore m + n = -2 \cdots \text{㉠}$$

양변에 $x=-2$ 을 대입하면

$$-8 + 4m - 2n + 1 = 3$$

$$\therefore 2m - n = 5 \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } m=1, n=-3$$

$$\therefore m - n = 4$$

9. 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지가 -3 이고, $x-3$ 으로 나눈 나머지가 5 이다. $f(x)$ 를 $(x+1)(x-3)$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $2x-1$

해설

$$\begin{aligned} f(-1) &= -3, f(3) = 5 \\ f(x) &= (x+1)(x-3)Q(x) + ax + b \\ -a + b &= -3, 3a + b = 5 \\ a = 2, b &= -1 \\ \therefore ax + b &= 2x - 1 \end{aligned}$$

10. $x^5 + x + 1$ 을 $x + 1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라고 할 때, $Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$x^5 + x + 1 = (x + 1)Q(x) + R$$

$$x = -1 \text{을 양변에 대입하면 } R = -1$$

$$\therefore x^5 + x + 1 = (x + 1)Q(x) - 1 \cdots \textcircled{1}$$

$Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지는 $Q(1)$

$$\textcircled{1} \text{에 } x = 1 \text{을 대입하면 } 3 = 2Q(1) - 1$$

$$\therefore Q(1) = 2$$

11. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4$ 로 나누었을 때의 나머지가 $-x + 4$ 이다. 다항식 $f(x+1)$ 을 $x^2 + 2x - 3$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x + 1$

② $-x + 3$

③ $x - 1$

④ $2x$

⑤ $2x - 3$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4)P(x) - x + 4 \\ &= (x+2)(x-2)P(x) - x + 4 \\ \therefore f(-2) &= 6, f(2) = 2 \\ f(x+1) &= (x^2 + 2x - 3)Q(x) + ax + b \\ &= (x+3)(x-1)Q(x) + ax + b \\ x = -3 \text{을 대입하면 } f(-2) &= -3a + b = 6 \\ x = 1 \text{을 대입하면 } f(2) &= a + b = 2 \\ \therefore a &= -1, b = 3 \\ \text{따라서 나머지는 } &-x + 3 \end{aligned}$$

12. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b 를 $x-1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} k & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & a \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 5 \end{array}$$

- ① $a=3$ ② $b=2$ ③ $c=1$
 ④ $d=4$ ⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & -1 & b \\ & & 1 & a+1 & a \\ \hline & 1 & a+1 & a & b+a \end{array}$$

$k=1, a=3, b=2, c=1, d=4$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

13. $2x^2 + xy - 3y^2 + 5x + 5y + 2$ 를 인수분해 하면 $(x + ay + b)(2x + cy + d)$ 이다. 이 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 + xy - 3y^2 + 5x + 5y + 2 \\ &= 2x^2 + (y + 5)x - 3y^2 + 5y + 2 \\ &= 2x^2 + (y + 5)x - (y - 2)(3y + 1) \\ &= (x - (y - 2))(2x + (3y + 1)) \\ &= (x - y + 2)(2x + 3y + 1) \\ &\therefore a = -1, b = 2, c = 3, d = 1 \end{aligned}$$

14. 다음 중 다항식 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a-b$

② $b-c$

③ $c-a$

④ $a+b+c$

⑤ $a-b+c$

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면

$$(\text{준식}) = a^3(b-c) - a(b^3 - c^3) + bc(b^2 - c^2)$$

$$= (b-c)\{a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b+c)\}$$

$$= (b-c)\{b^2(c-a) + b(c^2 - ca) - a(c^2 - a^2)\}$$

$$= (b-c)(c-a)(b^2 + bc - ac - a^2)$$

$$= (b-c)(c-a)\{c(b-a) + (b^2 - a^2)\}$$

$$= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$$

15. $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=5$, $a^3+b^3+c^3=2$ 일 때, abc 의 값은?

- ① $-\frac{5}{3}$ ② 0 ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 \\ &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{ 이므로} \\ & 5 = 1 - 2(ab+bc+ca) \\ & \therefore ab+bc+ca = -2 \\ & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca) \text{ 이므로} \\ & 2 - 3abc = 1 \cdot (5 + 2) \\ & \therefore abc = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

17. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14(x > 0)$ 일 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값은?

- ① 36 ② 44 ③ 52 ④ 68 ⑤ 82

해설

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 \text{ 이므로}$$

$$x + \frac{1}{x} = 4 \quad (\because x > 0)$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) = 52$$

18. $a+b+c=1$, $ab+bc+ca=1$, $abc=1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

- ① 3 ② -3 ③ 1 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

해설

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \\ 1 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2 \\ \therefore a^2 + b^2 + c^2 &= -1 \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc & \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3 &= 1 \cdot (-1 - 1) = -2 \\ \therefore a^3 + b^3 + c^3 &= 1\end{aligned}$$

19. $x + y = 2$, $x^3 + y^3 = 14$ 일 때, $x^5 + y^5$ 의 값을 구하면?

- ① 12 ② 32 ③ 52 ④ 82 ⑤ 102

해설

$$x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) \cdots (*)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$\therefore 14 = 8 - 6xy$$

$$\therefore xy = -1 \cdots \cdots ①$$

$$x^3 + y^3 = 14 \cdots \cdots ②$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4 - 2(-1) = 6 \cdots \cdots ③$$

①, ②, ③을 (*)에 대입하면

$$x^5 + y^5 = 6 \times 14 - 2 = 82$$

20. 1999개의 다항식 $x^2 - 2x - 1, x^2 - 2x - 2, \dots, x^2 - 2x - 1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

- ① 43개 ② 44개 ③ 45개 ④ 46개 ⑤ 47개

해설

$x^2 - 2x - n = (x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수)라 하면 ($1 \leq n \leq 1999$ 인 자연수)

$$ab = n, a = b - 2$$

$\therefore n = 1 \cdot 3, 2 \cdot 4, 3 \cdot 5, \dots, 43 \cdot 45 (= 1935)$ 의 43개

21. $x^4 - 11x^2 + 1$ 이 $(x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)$ 로 인수분해될 때, $a + b$ 의 값은?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 11x^2 + 1 &= (x^2 - 1)^2 - 9x^2 \\ &= (x^2 - 1)^2 - (3x)^2 \\ &= (x^2 - 3x - 1)(x^2 + 3x - 1) \\ &= (x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)\end{aligned}$$

$$\therefore a = -3, b = -1$$

$$\therefore a + b = -4$$

22. 세 양수 a, b, c 가 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 를 만족시킬 때 a, b, c 를 세 변으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이라고 한다. 이 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0 \text{에서} \\ & a > 0, b > 0, c > 0 \text{이므로 } a + b + c \neq 0 \\ & \therefore a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \\ & \therefore \frac{1}{2} \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} = 0 \\ & \therefore a = b = c \text{ (}\because a, b, c \text{는 실수)} \\ & \text{따라서 } a, b, c \text{를 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이고 그} \\ & \text{넓이가 } \frac{\sqrt{3}}{4} \text{이므로 } \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ & a^2 = 1 \\ & \therefore a = b = c = 1 \\ & \therefore a + b + c = 3 \end{aligned}$$

23. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots + 99^2$ 을 계산하여라.

① 99

② 100

③ 4950

④ 5050

⑤ 10000

해설

$$\begin{aligned} & 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots + 99^2 \\ &= 99^2 - 98^2 + 97^2 - 96^2 + \dots + 3^2 - 2^2 + 1^2 \\ &= (99^2 - 98^2) + (97^2 - 96^2) + \\ & \quad \dots + (3^2 - 2^2) + 1^2 \\ &= (99-98)(99+98) + (97-96)(97+96) + \dots + (3-2)(3+2) + 1 \\ &= (99+98) + (97+96) + \dots + (3+2) + 1 \\ &= 1 + 2 + 3 + \dots + 99 \\ &= (1+99) + (2+98) + \dots + (49+51) + 50 \\ &= 4950 \end{aligned}$$

24. 두 다항식 $A = x^3 + x^2 + ax - 3$, $B = x^3 - x^2 - ax + 5$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a 의 값은?

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} A + B &= 2x^3 + 2 = 2(x^3 + 1) \\ &= 2(x + 1)((x^2 - x + 1)) \end{aligned}$$

$$G = x + 1 \text{ 이므로}$$

$x = -1$ 을 A, B 에 대입하면 식의 값은 0

$$\therefore a = -3$$

※ $A = aG, B = bG$ (a, b 는 서로소), $A + B = (a + b)G$

즉, 최대공약수는 두 식의 합의 인수이다.

25. x 에 대한 세 다항식 $f(x), g(x), h(x)$ 가 항등식 $(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x)$ 를 만족한다. 이 때, $f(x), g(x), h(x)$ 의 최소공배수를 구하면?

① $f(x)$

② $xf(x)$

③ $x(x+1)f(x)$

④ $(x-1)f(x)$

⑤ $(x+1)(x-1)f(x)$

해설

$(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x)$ 에서

① 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $x = 0, -1$ 을 대입하면 $f(0) = f(-1) = 0$

② 다항식 $g(x)$ 에 대하여 $x = 1, -1$ 을 대입하면 $g(1) = g(-1) = 0$

③ 다항식 $h(x)$ 에 대하여 $x = 0, 1$ 을 대입하면 $h(0) = h(1) = 0$

①, ②, ③으로부터

$f(x), g(x), h(x)$ 의 최대공약수를 G 라 하면

$f(x) = x(x+1)G, g(x) = (x-1)(x+1)G, h(x) = x(x-1)G$

$\therefore f(x), g(x), h(x)$ 의 최소공배수는

$x(x+1)(x-1)G = (x-1)f(x)$