1. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3 = 0$ 을 풀면?

① $x = \pm 1,\quad x = 1 \pm \sqrt{2}i$　　② $x = \pm 2,\quad x = 1 \pm \sqrt{3}i$

③ $x = \pm 1,\quad x = 1 \pm \sqrt{3}i$　　④ $x = \pm 2,\quad x = 1 \pm \sqrt{2}i$

⑤ $x = \pm 2,\quad x = 3 \pm \sqrt{2}i$

해설

조립제법을 이용한다.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -2 & 2 & 2 & -3 \\
 & & 1 & -1 & 1 & 3 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\
 & & -1 & 2 & -3 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{0} &
\end{array}
$$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x+1)(x^2-2x+3) = 0$

$\therefore\ x = \pm 1,\quad x = 1 \pm \sqrt{2}i$

2. $x^4-5x^2-14=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 4 ② -4 ③ 8 ④ -8 ⑤ -16

해설

$x^4-5x^2-14=(x^2+2)(x^2-7)=0$이므로
두 허근 α, β는
각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로
$\alpha^2+\beta^2=-2-2=-4$

3. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면

다른 한 근은 $1-i$이다.

$\therefore \ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$

$\Rightarrow \quad x^2-2x+2=0$

주어진 조건에 맞는 방정식 :

$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$

$\therefore$ ①이 조건에 맞다

4. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1 - \sqrt{2}$, 2　　② $-1 + \sqrt{2}$, -3　　③ $1 - \sqrt{2}$, 3

④ $1 - \sqrt{2}$, -3　　⑤ $-1 + \sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \quad \alpha = 3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

5. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore$ $a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

6. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$　② 4　③ $-3\sqrt{2}$
④ -4　⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$에서
$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$
i) $x = y$ 일 때
$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$
$x = \pm 2, \; y = \pm 2$
ii) $x = 2y$일 때
$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$
$y = \pm\sqrt{2}, \quad x = \pm 2\sqrt{2}$
$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

7. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ ax-y=3 \end{cases}$ 의 해가 좌표평면의 제1사분면에 있기 위한 실수 a의 값의 범위는?

① $a > -1$　② $a < -1$　③ $a > \frac{3}{2}$

④ $a < \frac{3}{2}$　⑤ $a > -2$

해설

$\begin{cases} x+y=2 & \cdots ㉠ \\ ax-y=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠ + ㉡에서 $(a+1)x=5$

$\therefore\ x=\frac{5}{a+1}\cdots\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $\frac{5}{a+1}+y=2$

$\therefore\ y=2-\frac{5}{a+1}$

그런데 $x>0,\ y>0$이므로

$\frac{5}{a+1}>0,\ 2-\frac{5}{a+1}>0$에서,

$a>\frac{3}{2}$

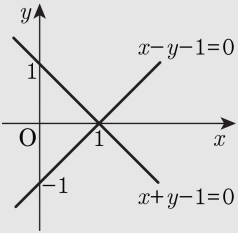
8. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

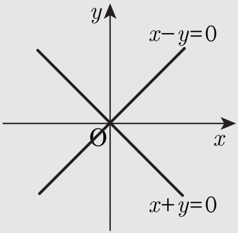
① 무한히 많다. ② 0개 ③ 1개

④ 2개 ⑤ 4개

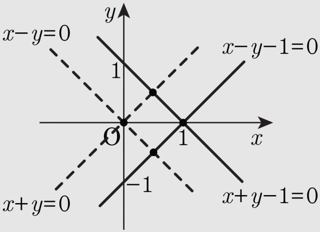
해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.





이것을 하나의 좌표평면에 그리면



위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2개이다.

9. 집과 A 정류장 사이의 거리를 x m, A 정류장과 B 정류장 사이의 거리를 y m 라고 할 때, 다음에서 (가), (나)를 식으로 나타내면? (단, 걸을 때의 속력은 60m/분 이고, 버스의 속력은 30km/시이다.)

(가) 집에서 A 정류장까지 걸어가서 3분을 기다린 후, 버스를 타고 B 정류장에 도착하는데 총 10분이 걸렸다. (나) 다음 날은 집에서 어제 걸어간 길과 버스를 타고 간 길을 모두 걸어서 B 정류장에 도착하는데 28분이 걸렸다.

① (가)$25x+3y=10500$, (나)$x+y=1680$

② (가)$25x+3y=10500$, (나)$x+y=3360$

③ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=1680$

④ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=3360$

⑤ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=1680$

해설

시속 30 km $\Rightarrow$ 분속 500 m

(가) $\frac{x}{60}+3+\frac{y}{500}=10,\ \frac{x}{60}+\frac{y}{500}=7$

$\therefore\ 25x+3y=10500$

(나) $\frac{x+y}{60}=28$

$\therefore\ x+y=1680$

10. 200 m 운동장 트랙에서 두 명의 학생이 일정한 속력으로 달리기를 한다. 두 학생이 같은 방향으로 달리면 3분 후에 만나고, 반대 방향으로 달리면 1분 후에 만난다고 할 때, 두 학생 중 빠른 학생의 속력은?

① 8 km/h ② 9 km/h ③ 10 km/h
④ 11 km/h ⑤ 12 km/h

해설

빠른 학생의 분속 : x
3분간 간 거리 : $3x$
느린 학생의 분속 : y
3분간 간 거리 : $3y$
같은 방향으로 3분간 달려간 후 만났으므로
거리의 차는 200
$3x-3y=200$
반대방향으로 1분간 달려간 후 만났으므로
거리의 합은 200
$x+y=200$

$$\begin{cases} 3x-3y=200 \\ x+y=200 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $x=\frac{400}{3}\text{m/분}$

$\Rightarrow \frac{400\text{m}}{3}/\text{분}=\frac{0.4\text{ km}}{3}\times 60/\text{시간}=8\text{ km/h}$

11. 방정식 $x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면?

① -7 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 7

해설

$x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$에서

$x^2+4xy+4y^2+y^2-2y+1=0$

$(x+2y)^2+(y-1)^2=0$

$x+2y$, $y-1$은 실수이므로 $x+2y=0$, $y-1=0$

$\therefore\ y=1,\ x=-2y=-2$

$\therefore\ x+y=-1$

12. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5=0$일 때, $x+y$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5$

$=x^2-2(2y-1)x+4y^2-4y+1+y^2-4y+4$

$=x^2-2(2y-1)x+(2y-1)^2+(y-2)^2$

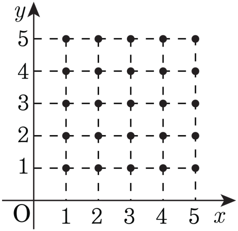
$=(x-2y+1)^2+(y-2)^2=0$

$\therefore\ x-2y+1=0,\ y-2=0$이므로

$y=2,\ x-4+1=0\quad \therefore\ x=3$

따라서 $x+y=3+2=5$

13. 다음 그림의 격자점 중 $xy+x-2y-2=3$을 만족시키는 점은 모두 몇 개인가?



① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개

④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$$xy+x-2y-2=x(y+1)-2(y+1)$$
$$=(x-2)(y+1)$$ 이므로

$(x-2)(y+1)=3$ 에서 문제의 $x,\ y$ 는

i) $x-2=1,\ y+1=3$ 일 때, $x=3,\ y=2$

ii) $x-2=3,\ y+1=1$ 일 때, $x=5,\ y=0$

iii) $x-2=-1,\ y+1=-3$ 일 때, $x=1,\ y=-4$

iv) $x-2=-3,\ y+1=-1$ 일 때,

$x=-1,\ y=-2$

$x,\ y$는 자연수이므로 조건을 만족시키는 점은 $(3,\ 2)$ 뿐이다.

14. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a는 -10 이상 -2 이하이다.

② a는 -2 이상 6 이하이다.

③ a는 6 이상이다.

④ a는 0 이하이다.

⑤ a는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β라 하면 (단, $\beta \geq \alpha$)

$\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = a + 2$

이 두 식에서 a를 소거하면

$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2,\ (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$

$\alpha - 1, \beta - 1$이 정수이므로

$\therefore\ \alpha = 2,\ \beta = 4$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = 0$

$\therefore\ a = 6,\ -2$

15. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30 개 이고 배점은 80 점이다. 문항별 배점은 2 점, 3 점, 4 점 의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2 점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

2 점 문항 개수를 x, 3 점 문항을 y,
4 점 문항을 z라 하자

$2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots$ ㉠

$x + y + z = 30 \quad \cdots$ ㉡

㉠$-4\times$㉡ $\Rightarrow$ $y = 40 - 2x$

㉠$-3\times$㉡ $\Rightarrow$ $z = x - 10$

$\therefore$ $x = 10$ 이면 $z = 0$

$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음

$\therefore$ $x \geq 11$, 최소 11 문항

16. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab의 값은?

$$x^3+x^2-5x+3=0,\ x^3+2x^2+ax+b=0, x^2+bx+a=0$$

① -1 ② 3 ③ $-\frac{9}{4}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3+x^2-5x+3=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3)=0$ $\therefore\ x=1$ 또는 $x=-3$

(i) 공통근이 $x=1$인 경우 나머지 두 방정식에 $x=1$을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 a, b값은 없다.

(ii) 공통근이 $x=-3$인 경우 다른 두 방정식은 $x=-3$을 근으로 하므로 $\{-27+18-3a+b=0\}$ $\cdots\cdots$㉠

$\{9-3b+a=0\}\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a=-\frac{9}{4}$, $b=\frac{9}{4}$, $ab=-\frac{81}{16}$

17. 오차방정식 $x^5-3x^4+x^3+x^2-3x+1=0$의 허근을 α ,β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

방정식 $x^5-3x^4+x^3+x^2-3x+1=0$에서

$(x+1)(x^4-4x^3+5x^2-4x+1)=0$

$\therefore\ x+1=0$ 또는

$x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$

(i) $x+1=0$에서 $x=-1$

(ii) $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(s^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5$$

$$=0\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$

이 때, $x+\dfrac{1}{x}=t$로 치환하면

$t^2-4t+3=0,\ (t-1)(t-3)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=3$

①$x+\dfrac{1}{x}=1$일 때, $x^2-x+1=0$

$$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

②$x+\dfrac{1}{x}=3$일 때, $x^2-3x+1=0$

$$\therefore\ x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

따라서, 주어진 방정식의

두 허근이 $\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로

두 허근 α, β의 합은

$\alpha+\beta=1$이다.

18. 방정식 $x^4+Ax^3-7x^2-Ax+3B=0$의 두 근이 -1과 -2일 때, 다른 두 근을 α,β라 하자. 이 때, $A+B-\alpha\beta$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)=x^4+Ax^3-7x^2-Ax+3B$라 하면 $-1,-2$가 근이므로

$f(-1)=1-A-7+A+3B=0$

$\therefore\ B=2$

$f(-2)=16-8A-28+2A+3B=0,\ -6A+3B-12=0\quad\therefore\ A=-1$

$\therefore\ A+B=-1+2=1\cdots\cdots$ ㉠

$\therefore\ (x+1)(x+2)(x^2-4x+3)=0$

따라서, 다른 두 근은 $x^2-4x+3=0$의 근이다.

$\therefore\ \alpha\beta=3\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $A+B-\alpha\beta=1-3=-2$

19. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = \alpha\beta\gamma$를 만족할 때, k의 값을 구하면?

① 7　② 6　③ 5　④ 4　⑤ 3

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 2,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -4,\ \alpha\beta\gamma = -k$ 이므로

$\alpha + \beta = 2 - \gamma,\ \beta + \gamma = 2 - \alpha,\ \gamma + \alpha = 2 - \beta$

주어진 식은 $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = \alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8 - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8 - 8 - 8 + k = -k$

$\therefore\ k = 4$

20. $x^3=1$의 세 근이 a, b, c이다. $22a^{21}+21b^{22}+22c^{21}$의 값이 실수 일 때, 이 실수 값을 구하면?

① 60 ② 65 ③ 68 ④ 72 ⑤ 75

해설

$x^3=1 \quad \Rightarrow \quad a^3=1 \;\; b^3=1 \;\; c^3=1$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+1)=0 \quad \cdots$ ①

$\therefore \;\; 22a^{21}+21b^{22}+22c^{21}$

$=22(a^3)^7+21(b^3)^7b+22(c^3)^7$

$=21b+44$이 값이 실수이므로

①에서 $b=1$이다.

$\therefore \;\; 21b+44=65$

21. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$ 이 실근을 가질 때, 실수 a 의 범위를 구하면?

① $a \geq -\dfrac{3}{4}$　② $a > -\dfrac{1}{2}$　③ $-1 < a < 1$

④ $a \leq \dfrac{2}{3}$　⑤ $a < 2$

해설

$\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$

의 해 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은 $t^2-(a+2)t+\dfrac{a^2+1}{4}=0$

위의 방정식이 실근을 가지려면

$D=(a+2)^2-4\times\dfrac{a^2+1}{4}\geq 0$

$4a+3\geq 0$

$\therefore\ a\geq -\dfrac{3}{4}$