**1.** 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$$[x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y]$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y$
$= (x-y)(x^2+xy+y^2) + xy(x-y) + 2(x+y)(x-y) + (x-y)$
$= (x-y)\{(x+y)^2 + 2(x+y) + 1\}$
$= (x-y)(x+y+1)^2$
$p = -1, q = 1, r = 1$
$\therefore\ p^2 + q^2 + r^2 = 3$

**2.** $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$ 을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$ 이다. $pq$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\}+21x^2 \\
&= (x^2-7x-18)(x^2+3x-18)+21x^2 \\
&= \{(x^2-18)-7x\}\{(x^2-18)+3x\}+21x^2 \\
&= (x^2-18)^2-4x(x^2-18)-21x^2+21x^2 \\
&= (x^2-18)(x^2-4x-18)
\end{aligned}
$$

따라서 $p=-18$, $g=-4$

$\therefore pg=(-18)\times(-4)=72$

**3.** 모든 모서리의 길이의 합이 60이고, 대각선의 길이가 $\sqrt{77}$인 직육면체의 겉넓이는?

① 88 ② 100 ③ 124 ④ 148 ⑤ 160

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 $x$, $y$, $z$라고 하면

$4(x+y+z)=60$에서 $x+y+z=15$

또, 대각선의 길이는

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{77}$이므로

$x^2+y^2+z^2=77$

이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이고

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$이므로

$77=15^2-2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=225-77=148$

따라서, 직육면체의 겉넓이는 148이다.

**4.** $A : 0.4-0.25x \le 1.5x-1.35$, $B : -\frac{1-2x}{4} < \frac{2-x}{2} - \frac{x-1}{3}$ 가 있다. $A$에서 $B$를 제외한 수는?

① $x<1$ ② $x \ge 1$ ③ $x < \frac{19}{16}$
④ $x \le \frac{19}{16}$ ⑤ $x \ge \frac{19}{16}$

해설

$0.4-0.25x \le 1.5x-1.35$ 의 양변에 100을 곱하면
$40-25x \le 150x-135$
$175 \le 175x$
$1 \le x$
$A : 1 \le x$
$-\frac{1-2x}{4} < \frac{2-x}{2} - \frac{x-1}{3}$ 의 양변에 12 를 곱하면
$-3(1-2x) < 6(2-x)-4(x-1)$
$-3+6x < 12-6x-4x+4$
$x < \frac{19}{16}$
$B : x < \frac{19}{16}$ 이므로
$A$에서 $B$를 제외한 수는 $x \ge \frac{19}{16}$ 이다.

**5.** 십의 자리 숫자가 일의 자리 숫자의 두 배인 어떤 두 자리 자연수가 21 보다 크고 60 보다 작다고 한다. 처음 두 자리 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 42

해설

일의 자리 숫자를 $x$ 라 하면 십의 자리 숫자는 $2x$ 이다.
즉, 이 두 자리 자연수는 $(10 \times 2x) + x = 21x$ 이다.
$21 < 21x < 60$
$1 < x < \frac{20}{7}$ , $\frac{20}{7} = 2.857142\cdots$
$\therefore x = 2$
처음 두 자리 자연수는 42 이다.

**6.** 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$을 만족하는 $x$의 범위가 $-2<x<1$일 때, 부등식 $cx^2-ax+b<0$을 만족하는 $x$의 범위는?

① $-2<x<1$　② $-1<x<\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{2}<x<2$
④ $\frac{1}{2}<x<1$　⑤ $\frac{1}{2}<x<2$

해설

$ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<1$이므로

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0(a<0)$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)=x^2+x-2<0$

$\therefore\ \frac{b}{a}=1, \frac{c}{a}=-2$

$cx^2-ax+b<0$에서

양변을 $a$로 나누면

$\frac{c}{a}x^2-x+\frac{b}{a}>0 \Leftrightarrow -2x^2-x+1>0$

$2x^2+x-1<0, (2x-1)(x+1)<0$

$\therefore\ -1<x<\frac{1}{2}$

**7.** 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 을 풀 때, 근우는 $b$ 를 잘못보고 풀어서 $1 < x < 3$ 이라는 해를 얻었고, 기원이는 $a$ 를 잘못보고 풀어서 $-2 < x < 4$ 이라는 해를 얻었다. 이 부등식의 옳은 해는?

① $-1 < x < 2$ ② $-2 < x < 3$

③ $2 - 2\sqrt{5} < x < 2 + 2\sqrt{5}$ ④ $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$

⑤ $2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

해설

$1 < x < 3 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$

$\therefore a = -4$

$-2 < x < 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) < 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$

$\therefore b = -8$

$x^2 - 4x - 8 < 0$

$\therefore 2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

**8.** 두 부등식 $x^2-x-2>0$, $x^2-(a-3)x-3a<0$를 동시에 만족하는 정수가 $-2$뿐일 때, $a$의 값의 범위를 구하면 $m<a\le n$이다. $mn$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

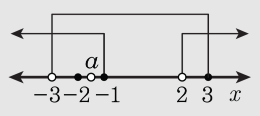
▷ 정답 : $-6$

해설

$x^2-x-2>0$에서 $x<-1$, $x>2$

$x^2-(a-3)x-3a<0$에서

$(x+3)(x-a)<0$




그림에서와 같이 동시에 만족하는

정수값이 $-2$뿐이려면 $-2<a\le 3$이다.

$\therefore\ -2<a\le 3$

**9.** 부등식 $\left|\frac{(1-a)x}{x^2+1}\right| < 1$이 모든 실수 $x$에 대하여 항상 성립할 때, $a$의 범위를 구하면?

① $0 < a \le 3$

② $a < -1$ 또는 $a > 3$

③ $-1 < a < 3$

④ $-1 \le a \le 3$

⑤ $-3 < a < 1$

해설

$-1 < \frac{(1-a)x}{x^2+1} < 1$

$\Rightarrow$ i) $-x^2 - 1 < (1-a)x$,

ii) $(1-a)x < x^2 + 1$

$\Rightarrow$ i) $x^2 + (1-a)x + 1 > 0$,

ii) $x^2 + (a-1)x + 1 > 0$

둘 모두 판별식이 0보다 작아야 한다.

$D = (1-a)^2 - 4 < 0$

$D = (a-1)^2 - 4 < 0$

$\Rightarrow$ $(a-3)(a+1) < 0$

$\Rightarrow$ $-1 < a < 3$

$-1 < a < 3$

$\therefore$ $-1 < a < 3$

**10.** 세 꼭짓점이 $A(1,\ 3)$, $B(p,\ 3)$, $C(1,\ q)$ 인 $\triangle ABC$의 외심의 좌표가 $(2,\ 1)$일 때 $pq$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $pq=-3$

해설

$(2-1)^2+(1-3)^2=(2-p)^2+(1-3)^2$에서 $(p-2)^2=1$

$\therefore\ p=1,\ 3$

그런데 $p=1$일 때 점 A, B가 일치하므로 $p\neq 1$ $\therefore\ p=3$

$(2-1)^2+(1-3)^2=(2-1)^2+(1-q)^2$에서 $(q-1)^2=4$

$\therefore\ q=3,\ -1$

그런데 $q=3$일 때 점 A, C가 일치하므로 $q\neq 3$

$\therefore\ pq=3\times(-1)=-3$

**11.** 두 점 $A(-2,\ 1)$, $B(4,\ -3)$에서 같은 거리에 있고 직선 $y=2x-1$ 위에 있는 점 의 좌표는?

① $(-3,\ -7)$　② $(-2,\ -5)$　③ $(3,\ 5)$
④ $(2,\ 3)$　⑤ $(3,\ 2)$

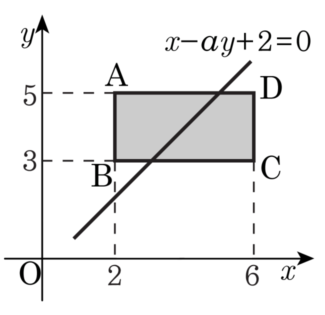
해설

직선 $y=2x-1$위에 있는 점을 $P(a,\ b)$라 하면 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서
$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-4)^2+(b+3)^2$
$12a-8b=20$
$\therefore\ 3a-2b=5\cdots\cdots$ ①
또, 점 P는 $y=2x-1$ 위에 있으므로
$b=2a-1\cdots\cdots$ ②
①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-7$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있으므로 구하는 점은
$A(-2,1), B(4,-3)$의 수직이등분선 위에 있다.
$\overline{AB}$의 기울기는 $\frac{1+3}{-2-4}=-\frac{2}{3}$이므로
수직이등분선의 기울기는 $\frac{3}{2}$, $A(-2,1), B(4,-3)$ 의 중점 $(1,-1)$를 지나므로
$\therefore\ y+1=\frac{3}{2}(x-1)\ \cdots$①
구하는 점 P는 $y=2x-1$과 ①의 교점이다.
연립하여 풀면 $x=-3, y=-7$
$\therefore\ P(-3,\ -7)$

**12.** 다음 그림에서 □ABCD 의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $x-ay+2=0$ 일 때, 상수 $a$ 의 값은?




① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

해설

직사각형의 넓이를 이등분하려면 직사각형의 대각선의 교점을 지나야 한다.

두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{2+6}{2},\ \frac{3+5}{2}\right)$

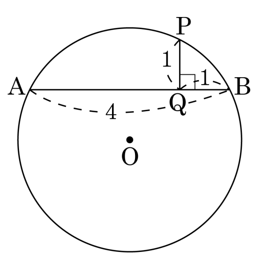
즉 $(4,4)$ 이다.

직선 $x-ay+2=0$ 이 점 $(4,4)$ 를 지나야 한다.

따라서 $(4,4)$ 를 대입하면 $4-4a+2=0$

$\therefore\ a=\frac{3}{2}$

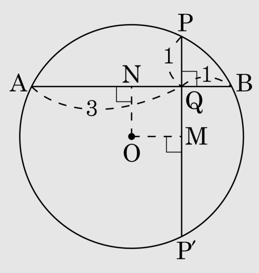
**13.** 다음 그림과 같이 한 원 O 의 호와 현으로 이루어진 도형에서 $\overline{AB} = 4$, $\overline{PQ} = \overline{BQ} = 1$ 일 때, 원 O 의 반지름의 길이의 제곱을 구하여라.




▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설




그림과 같이 $\overline{PQ}$ 의
연장선과 원 O 의 교점을
P′ 이라 하면
$\overline{P'Q} = 3$ $(\because \overline{PQ} \cdot \overline{P'Q} = \overline{AQ} \cdot \overline{BQ})$
또, 원 O 의 중심에서 $\overline{AB}, \overline{PP'}$ 에 내린
수선의 발을 각각 N, M 이라 하면
원의 중심에서 현에 그은 수선은
현을 수직이등분하므로
$\overline{NB} = \overline{PM} = 2$
따라서 $\overline{NQ} = \overline{QM} = 1$ 이 되므로
□OMQN 은 정사각형이다.
$\therefore\ \overline{OM} = 1,\ \overline{PM} = 2$
그러므로 피타고라스의 정리에 의하여
$r = \overline{OP} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
$r^2 = 5$

**14.** 직선 $y = 3x$ 를 $x$ 축의 방향으로 $a$ 만큼 평행이동 한 직선이 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접할 때, $a^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x$ 축 방향으로 $a$ 만큼 평행 이동시킨 직선

: $y = 3(x - a) \Rightarrow \quad 3x - y - 3a = 0$

원에 접하므로 중심과 직선 사이의 거리는 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{|-3a|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = 3$$

$a = \pm\sqrt{10}$

$\therefore \ a^2 = 10$

**15.** 다항식 $x^6$을 $x+\frac{1}{2}$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R$라 할 때, $Q(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나눌 때의 나머지는?

① $\frac{1}{64}$ ② $-\frac{1}{32}$ ③ $\frac{3}{32}$ ④ $-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{1}{16}$

**해설**

나머지정리에 의하여 $R = \left(-\frac{1}{2}\right)^6$

$a = -\frac{1}{2}$로 놓으면

$R = a^6$

$x^6 = (x-a)Q(x) + a^6$에서

$$Q(x) = \frac{x^6 - a^6}{x-a}$$
$$= x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5$$

$Q(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는 $Q(a)$의 값과 같으므로 $Q(a) = 6a^5$

따라서 $Q\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{3}{16}$

**16.** $n$이 양의 정수일 때, $8^{100n}-1$을 9로 나눈 나머지는?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 4　　⑤ 6

해설

$8=x$라 하면 $8^{100n}-1=x^{100n}-1$이고 $9=x+1$이 된다.
$x^{100n}-1$을 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R$라 하면
$x^{100n}-1=(x+1)Q(x)+R$
양변에 $x=-1$을 대입하면 $R=0$
$\therefore\ x^{100n}-1=(x+1)Q(x)$
위의 식에 $x=8$을 대입하면 $8^{100n}-1=9Q(x)$이므로 $8^{100n}-1$을 9로 나눈 나머지는 0이다.

**17.** 다음 중에서 $2x^3-(4a+3)x^2+2(3a-1)x+4a$의 인수인 것은?

① $2x+1$　　② $x+2$　　③ $x+2a$
④ $x+a$　　⑤ $2x-1$

해설

$2x^3-(4a+3)x^2+2(3a-1)x+4a$
$=2x^3-4ax^2-3x^2+6ax-2x+4a$
$=(2x^3-3x^2-2x)-2a(2x^2-3x-2)$
$=x(2x^2-3x-2)-2a(2x^2-3x-2)$
$=(2x^2-3x-2)(x-2a)$
$=(x-2a)(2x+1)(x-2)$

**18.** $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^5+x^4+x^3+x^2+1$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$ )

① 0 ② $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ③ $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$
④ $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면, $x^2-x+1=0$
$x^5+x^4+x^3+x^2+1$ 를 $x^2-x+1$ 로 직접 나누면
몫이 $x^3+2x^2+2x+1$ 이고 나머지는 $-x$ 이다.
즉, $x^5+x^4+x^3+x^2+1$
$=(x^2-x+1)(x^3+2x^2+2x+1)-x$
$\therefore\ x^5+x^4+x^3+x^2+1$
$=-x\ (\because x^2-x+1=0)$
$=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x^2-x+1=0$ 을 만든 다음 양변에 $x+1$ 를 곱하면
$(x+1)(x^2-x+1)=0 \Rightarrow x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1$
$x^5+x^4+x^3+x^2+1=-x^2-x-1+x^2+1$
$=-x=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

**19.** $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(7,\ 1)$, $\mathrm{B}(5,\ 5)$ 라 할 때, $\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$ 을 최소로 하는 점 P 의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$ , 그 때의 최솟값을 $r$ 라 할 때, $\alpha+\beta+r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 46

해설

$\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$

$=x^2+y^2+(x-7)^2+(y-1)^2+(x-5)^2+(y-5)^2$

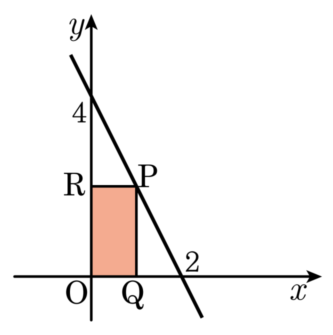
$=3(x-4)^2+3(y-2)^2+40$

$(x-4)^2\ge 0,\ (y-2)^2\ge 0$ 이므로

$x=4,\ y=2$ 에서 최솟값 $r=40$ 을 갖는다.

$\therefore\ \alpha+\beta+r=46$

**20.** 직선 $y=-2x+4$ 위의 제1 사분면에 있는 한 점 P 에서 $x$ 축, $y$ 축에 수선을 그어 그때의 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, 사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값은?




① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$y=x(-2x+4)(0<x<2)$
$=-2x^2+4x$
$=-2(x^2-2x+1-1)$
$=-2(x-1)^2+2$

$x=1$ 일 때 최댓값 2

**21.** 방정식 $x^5 = 1$의 허근을 $\omega$라 하자. $\alpha = \omega + \frac{1}{\omega}$일 때 $\alpha^2 + \alpha$의 값은?

① $-2$　　② $-1$　　③ $0$　　④ $1$　　⑤ $2$

해설

$x^5 = 1, (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore\ \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$

$\omega^2$ 으로 이 식을 나누면

$$\omega^2 + \omega + 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega}^{2} = 0$$

$$\left(\omega^2 + \frac{1}{\omega}^{2}\right) + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0,$$

$$\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 - 2 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0$$

$\therefore \alpha^2 + \alpha - 1 = 0,\ \alpha^2 + \alpha = 1$

**22.** 실수 $a$가 $0 < a < 2$이고, $x, y$가 연립방정식

$$\begin{cases} 4x - ay = 16 \\ ax - y \ = a^3 \end{cases}$$ 을 만족시킬 때,

$\sqrt{x+}y + \sqrt{x-}y$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\begin{cases} 4x - ay = 16 & \cdots ㉠ \\ ax - y \ = a^3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $y = ax - a^3 \quad \cdots$ ㉢

㉢식을 ㉠식에 대입하면 $4x - a(ax - a^3) = 16$

$(4 - a^2)x = 16 - a^4$

$\therefore\ x = 4 + a^2$ ($\because\ a \neq \pm 2$)

$\therefore\ y = a(4 + a^2) - a^3 = 4a$

$$\begin{aligned} \therefore\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} &= \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(a-2)^2} \\ &= a + 2 - (a - 2) \\ &\quad (\because\ 0 < a < 2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

**23.** $a$, $b$, $c$는 실수이고, $a(a+b+c)>0$, $a(b+2a)<0$을 만족시킬 때, $ab$ $\boxed{가}$ $0$, $b(a+b+c)$ $\boxed{나}$ $0$이다. 가, 나에 알맞은 기호를 차례로 쓰면?

① $<$, $<$　　② $<$, $>$
③ $>$, $>$　　④ $>$, $<$
⑤ 결정할 수 없다.

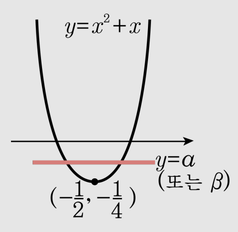
해설

$a(a+b+c)>0$에서 $a \neq 0$, $a+b+c \neq 0$임을 알 수 있다.
한편 $a(b+2a)=ab+2a^2<0$에서 $ab<-2a^2<0$이므로 $ab<0$이다.
또 $ab<0$이므로 $ab(a+b+c)^2<0$에서 $\{a(a+b+c)\}\{b(a+b+c)\}<0$이다.
그런데, $a(a+b+c)>0$이므로 $b(a+b+c)<0$이다.

**24.** 실계수 사차방정식 $(x^2+x)^2+a(x^2+x)+1=0$의 근이 모두 실수가 되도록 하는 $a$의 값의 범위는?

① $a \le -\frac{1}{4}$　② $a \ge -\frac{1}{4}$　③ $a \ge 0$
④ $a \le -2$　⑤ $a \ge -2$

해설




$x^2+x=t$ 라 두면 주어진 방정식은
$f(t)=t^2+at+1=0$ ······ ㉠
㉠의 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면
$x^2+x=\alpha$와
$x^2+x=\beta$
$y=x^2+x$와 $y=\alpha$(또는$\beta$) 의 그래프를
그려보면 다음과 같다.
네 근이 모두 실수일 조건은
$\alpha \ge -\frac{1}{4}$ 이고 $\beta \ge -\frac{1}{4}$
이렇게 될 조건은 ㉠에 대하여
$D=a^2-4\ge 0$, 대칭축 : $-\frac{a}{2} \ge -\frac{1}{4}$,
$f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}-\frac{a}{4}+1\ge 0$
정리하면 구하는 조건은 $a \le -2$