1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $i^2 = -1$

② $x^2 = -4$ 를 만족하는 실수는 존재하지 않는다.

③ $\sqrt{-9} = 3i$

④ 2는 복소수이다.

⑤ $a + bi$ 에서 $b = 0$ 이면 실수이다. (단, a, b 는 실수)

해설

④ $2 = 2 + 0 \cdot i$ 이므로 복소수이다.

2. 다음 등식 $x+y+(2x-y)i=2+7i$를 만족하는 두 실수 x, y에 대하여 xy값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 3 ② -3 ③ 0 ④ 5 ⑤ -5

해설

$x+y+(2x-y)i=2+7i$
$\Rightarrow x+y-2+(2x-y-7)i=0$
$\Rightarrow x+y-2=0, 2x-y-7=0$
연립하면, $x=3,\ y=-1$

3. $(4+3i)^2-(4-3i)^2$ 의 값은?

① 0 ② 24 ③ 48 ④ $24i$ ⑤ $48i$

해설

$(4+3i)^2-(4-3i)^2$
$=16+24i-9-(16-24i-9)$
$=48i$

4. $\sqrt{(-1)^2}+i^2-\dfrac{1}{i}$ 를 계산하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① -1　② 0　③ 1　④ $-i$　⑤ i

해설

(준식)$=1-1+i=i$

5. 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 가 $z\bar{z} = 4$ 를 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$z = x + yi$ 에서 $\bar{z} = x - yi$ 이므로
$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$
주어진 조건에서 $z \cdot \bar{z} = 4$ 이므로
$x^2 + y^2 = 4$

6. $\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 - i$ 의 켤레복소수를 각각 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라 할 때, $\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$ 의 값은?

① 0 ② 3 ③ $7-2i$ ④ $7-i$ ⑤ $7+i$

해설

$\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 - i$ 에서 $\overline{\alpha} = 1 - i$, $\overline{\beta} = 2 + i$ 이므로

$\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$

$= (1+i)(1-i) + (1+i)(2+i) + (1-i)(2-i) + (1-i)(2+i)$

$= (1+1) + (2-1+3i) + (2-1-3i) + (2+1-i)$

$= 7 - i$

7. 실수 k 에 대하여 복소수 $z=2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z=2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0 이어야 한다.

$z=2(k-i)-k(1+i)^2$
$=2k-2i-2ki$
$=2k-(2+2k)i$

허수 부분이 0이려면 $2+2k=0$ 이어야 한다.

따라서 $k=-1$

8. 복소수 $z=(2+i)a^2+(1+4i)a+2(2i-3)$ 이 순허수일 때, 실수 a 의 값은?

① -2 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$z=(2a^2+a-6)+(a^2+4a+4)i$
순허수이므로 $2a^2+a-6=0$
$\Rightarrow\ (a+2)(2a-3)=0$
$\Leftrightarrow\ a=-2$ 또는 $a=\frac{3}{2}$
그런데 $a=2$ 이면,
$a^2+4a+4=0$ 이 되어 순허수가 성립되지 않는다.
$\therefore\ a=\frac{3}{2}$

9. $i^2 = -1$ 이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2, \quad -\sqrt{2}, \quad 2i, \quad -2i,$ $3i, \quad -3i, \quad 1-i, \quad 1+i$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$i^2 = -1$ 이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$ 의 꼴이 되어야 한다.

$\therefore \; 2i, \; -2i, \; 3i, \; -3i$ 4 개,

$2, -\sqrt{2}$ 는 실수이므로

$(\text{실수})^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$ 가 된다.

10. $z = \dfrac{2}{1-i}$ 일 때, $2z^2 - 4z - 1$ 의 값을 구하면?

① -1　　② 2　　③ -3　　④ 4　　⑤ -5

해설

$z = \dfrac{2}{1-i} = 1 + i$

$$\begin{aligned} \therefore\ 2z^2 - 4z - 1 &= 2(1+i)^2 - 4(1+i) - 1 \\ &= 4i - 4 - 4i - 1 \\ &= -5 \end{aligned}$$

해설

$z = 1 + i, z - 1 = i$

양변을 제곱하고 정리하면

$z^2 - 2z = -2$

$2z^2 - 4z - 1$

$= 2(z^2 - 2)z - 1$

$= -4 - 1 = -5$

11. $z_1 = 1-i, z_2 = 1+i$ 일 때, $z_1^3 + z_2^3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $4-2i$　② 0　③ 20
④ $-2+4i$　⑤ -4

해설

$z_1 + z_2 = 2,\ z_1 z_2 = 2$

$$\begin{aligned} z_1^3 + z_2^3 &= (z_1+z_2)^3 - 3z_1z_2(z_1+z_2) \\ &= 8-12 \\ &= -4 \end{aligned}$$

12. $x=\sqrt{3}+2i$, $y=\sqrt{3}-2i$ 일 때, x^2+xy+y^2 의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 5 ② 7 ③ $2\sqrt{3}+4i$

④ 12 ⑤ $12+2\sqrt{3}i$

해설

$x+y=2\sqrt{3}$,
$xy=(\sqrt{3}+2i)(\sqrt{3}-2i)=3-4i^2=7$ 이므로
$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=12-7=5$ 이다.

13. 복소수 $z = 1 - i$ 라고 할 때, $wz + 1 = \overline{w}$ 를 만족하는 복소수 w 의 실수부분을 구하면? (단, $\overline{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① -2　　② -1　　③ 1　　④ $\frac{1}{2}$　　⑤ 2

해설

$w = a + bi$ 라 하면

$$\begin{aligned}(a+bi)(1-i)+1 &= a - ai + bi + b + 1\\ &= (a+b+1) - (a-b)i\\ &= a - bi \text{ 에서}\end{aligned}$$

$a + b + 1 = a$, $\therefore$ $b + 1 = 0$ 이므로 $b = -1$

$a - b = b$ 이므로 $a + 1 = -1$ 에서 $a = -2$

따라서 w 의 실수부분은 -2

14. 복소수 z와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 다음을 만족하는 z를 구하면?

$$z+\bar{z}=4,\quad z\cdot\bar{z}=7$$

① $z=1\pm\sqrt{3}i$ ② $z=2\pm\sqrt{3}i$ ③ $z=3\pm\sqrt{3}i$
④ $z=1\pm2\sqrt{3}i$ ⑤ $z=2\pm2\sqrt{3}i$

해설

$z=a+bi$
$z+\bar{z}=2a=4, z\cdot\bar{z}=a^2+b^2=7$
$\therefore a=2, b=\pm\sqrt{3}$
$\therefore z=2\pm\sqrt{3}i$

15. 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z} = 13$, $z + \bar{z} = 4$ 일 때, 복소수 z 는? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $2 - 2i$　　② $2 \pm 3i$　　③ $2 \pm \sqrt{3}i$
④ $3 \pm 2i$　　⑤ $4 \pm 3i$

해설

$z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로
$z\bar{z} = 13$, $z + \bar{z} = 4$ 에서
$(a + bi)(a - bi) = 13$, $(a + bi) + (a - bi) = 4$
$a^2 + b^2 = 13$, $2a = 4$
$\therefore\ A = 2,\ b = \pm 3$
$z = 2 \pm 3i$

16. $\dfrac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}}$ 의 값은 ?

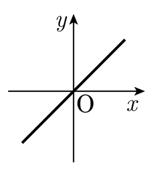
① $1-\sqrt{2}$ ② $-1-\sqrt{2}$ ③ $(1+\sqrt{2})i$

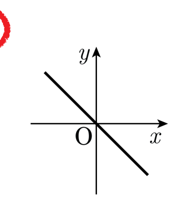
④ $-(1+\sqrt{2})i$ ⑤ $(1-\sqrt{2})i$

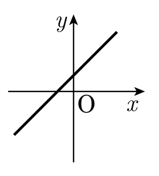
해설

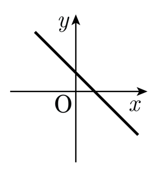
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{1}{i}\\ &= (\sqrt{2}+1)\times(-i)\\ &= -(1+\sqrt{2})i\end{aligned}$$

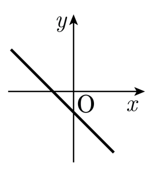
17. $(3+2i)z$가 실수가 되도록 하는 복소수 $z = x + yi$를 점 $(x,\ y)$로 나타낼 때, 점 $(x,\ y)$는 어떤 도형 위를 움직이는가? (단, x, y는 실수)

①


②


③


④


⑤


해설

$$(3+2i)(x+yi) = 3x + 3yi + 2xi - 2y$$
$$= (3x-2y) + (2x+3y)i$$

주어진 식이 실수가 되려면 허수부가 0이어야 하므로 $2x+3y=0$

$\therefore\ y = -\frac{2}{3}x$

따라서 기울기가 음수이고 y절편이 0인 그래프는 ②이다.

18. x가 실수일 때, 복소수$(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, x의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

(준식)$=(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$
i가 순허수이어야 제곱하면 음이 된다.
$\therefore\ x^2+4x+3=0$이고 $x^2+2x-3\neq 0$
$x=-1$ 또는 $x=-3\cdots$㉠
$x\neq 1$ 그리고 $x\neq -3\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $x=-1$이다.

19. $a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$가 순허수가 되도록 실수 a의 값을 구하면?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$
$=(a^2+2a-8)+i(a^2+a-6)$
$=(a+4)(a-2)+i(a+3)(a-2)$
만약에 $a=2$가 되면 실수가 된다.
$a \neq 2$, $\therefore\ a=-4$

20. 두 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}} = a + bi$ 일 때, $\dfrac{1}{2}ab$ 의 값은?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $-3\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $-4\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}}$
$= 4\sqrt{2}i + \sqrt{24} - \sqrt{8}i$
$= 4\sqrt{2}i + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}i$
$= 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}i$
$a = 2\sqrt{6}, b = 2\sqrt{2}$
$\therefore \dfrac{1}{2}ab = \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{3}$

21. $x=\dfrac{1-\sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $3x^2-2x$ 의 값은?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-i$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ i

해설

$x=\dfrac{1-\sqrt{2}i}{3}$, $3x-1=-\sqrt{2}i$ 의 양변을 제곱하면

$9x^2-6x+1=-2$, $9x^2-6x=-3$

양변을 3 으로 나누면

$\therefore\ 3x^2-2x=-1$

22. 0 이 아닌 실수 a 가 등식 $\frac{\sqrt{a+5}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{a+5}{a}}$ 를 만족할 때, $|\,a\,| + \sqrt{(a+5)^2}$ 을 간단히 하면?

① $-2a-5$　　② 5　　③ $2a+5$

④ -5　　⑤ $2a$

해설

$a+5 \geq 0,\ a<0$, $-5 \leq a < 0$

$|\,a\,| + \sqrt{(a+5)^2} = -(a) + (a+5) = 5$

23. 복소수들 사이의 연산 $*$가 다음과 같다고 하자.

$\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$

이 때, $(1+2i) * z = 1$을 만족시키는 복소수 z는?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1+i$　　② $1-i$　　③ $-1+i$

④ $-1-i$　　⑤ i

해설

$z = a + bi$라 하면

$(1+2i) * z$

$= (1+2i) + (a+bi) + (1+2i)(a+bi)i$

$= (-a-b+1) + (a-b+2)i = 1$

$-a-b+1 = 1,\ a-b+2 = 0$

$a = -1,\ b = 1$

$\therefore\ z = -1+i$

24. α, β가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$이다.)

> ㉠ $\alpha = \overline{\beta}$이면 $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다.
>
> ㉡ $\alpha = \overline{\beta}$일 때, $\alpha\beta = 0$이면 $\alpha = 0$이다.
>
> ㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다.
>
> ㉣ $\alpha + \beta i = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 없다

해설

㉠ $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\alpha = \overline{\beta}$이므로 $\beta = a - bi$

$\therefore\ \alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$

$\alpha\beta = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

$\therefore\ \alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 실수이다.

㉡ :㉠에서 $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0$, a, b는 실수이므로 $a = 0$, $b = 0$ 즉, $= a + bi = 0$이다.

㉢ :(반례) $\alpha = i$, $\beta = 1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = i^2 + 1^2 = 0$

㉣ :(반례) $\alpha = 1$, $\beta = i$

$\therefore\ \alpha + \beta i = 0$

$\therefore$ ㉢, ㉣는 α, β가 실수일 때만 성립한다.

25. $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{8}$ 값을 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 1
④ 0 ⑤ -1

해설

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\omega+1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$
$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \Rightarrow \omega^3=1$
$(\omega^3)^3\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$