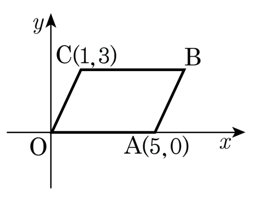
1. 다음 평행사변형 OABC 에서 A 와 C 의 좌표가 각각 $(5,\ 0)$, $(1,\ 3)$ 일 때, 두 점 A, B 를 지나는 직선의 y 절편은?



① -6 ② -9 ③ -12 ④ -15 ⑤ -18

해설

평행사변형의 두 변 OC 와 AB 는 서로 평행하므로 직선 OC 와 직선 AB 의 기울기는 같다.
따라서, 직선 AB 는 기울기가 3 이고 점 $(5,\ 0)$ 을 지나는 직선이다.
$y-0=3(x-5)$, $y=3x-15$
따라서 (y 절편)$=-15$ 이다.

2. 두 직선 $x-3y+5=0$, $x+9y-7=0$ 의 교점을 지나고, x 축의 양의 방향과 30° 의 각을 이루는 직선의 방정식이 $x+by+c=0$ 일 때 $b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 식을 연립하여 풀면 두 직선의 교점의 좌표는

$(-2,\ 1)$ 이고, 기울기는 $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y-1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$

$\therefore x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}+2=0$

$\therefore b=-\sqrt{3},\ c=2+\sqrt{3} \qquad \therefore\ b+c=2$

3. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$ 을 지나는 직선의 x 절편을 A, y 절편을 B, 원점을 O 라 할 때, $\triangle\mathrm{OAB}$ 의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$ 를 지나는 직선은

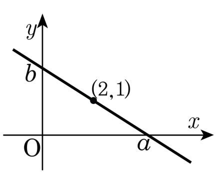
$y = \dfrac{-2-(-3)}{4-2}(x-2) - 3 = \dfrac{1}{2}x - 4$

$\Rightarrow$ x 절편은 8 이고, y 절편은 -4 이다.

$\therefore$ $\triangle\mathrm{OAB}$ 의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ 이다.

4. 다음 그림에서 a와 b사이의 관계식을 나타내면?



① $a+\frac{a}{2}=1$ ② $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$

③ $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$ ④ $\frac{2}{a}+b=1$

⑤ $\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}=1$

해설

x 절편이 a, y 절편이 b 인 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 이다.

따라서 $(2,\ 1)$ 을 지나므로

$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$ 이다.

5. 직선 $x + ay - 1 = 0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1,\ 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a = 2$

6. A $(1, 1)$, B $(-2, -3)$, C $(k, k+1)$이 일직선 위에 있도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k = 4$

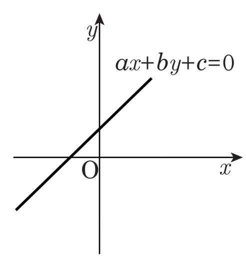
해설

A, B, C가 일직선 위에 있으려면
$\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 기울기가 일치해야 한다.

$$\therefore \quad \frac{-3-1}{-2-1} = \frac{k+1-(-3)}{k-(-2)}$$

$$\Rightarrow \quad \therefore \; k = 4$$

7. 직선 $ax+by+c=0$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $cx+ay+b=0$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?



① 제1사분면

② 제2사분면

③ 제3사분면

④ 제4사분면

⑤ 제1사분면과 제3사분면

해설

$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$ 이므로

주어진 직선의 방정식은 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

기울기 : $-\frac{a}{b}>0 \quad \therefore\ \frac{a}{b}<0$

y 절편 : $-\frac{c}{b}>0 \quad \therefore\ \frac{c}{b}<0$

두 부등식에서 $\frac{a}{c}>0$

마찬가지로 일차함수 $cx+ay+b=0$ 은

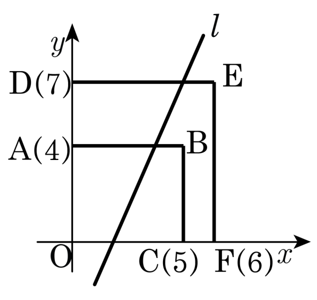
$y=-\frac{c}{a}x-\frac{b}{a}$,

기울기 : $-\frac{c}{a}<0$

y 절편 : $-\frac{b}{a}>0$

이상에서 이 직선은 제3사분면을 지나지 않는다.

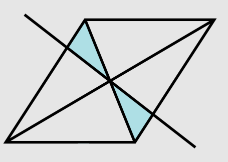
8. 아래 그림에서 직선 l이 두 직사각형 □OABC와 □ODEF의 넓이를 동시에 이등분할 때, 직선 $l : y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하면?



① $-\frac{5}{2}$　② $-\frac{3}{2}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

평행사변형의 넓이를 이등분하는 직선은 두 대각선의 중점을 지나는 직선이다.



따라서, □OABC와 □ODEF의 넓이를 동시에 이등분하는 직선 l은 두 직사각형의 중점을 지날때이다.

□OABC의 중점 : $\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{2}\right)$

□ODEF의 중점 : $\left(\frac{6}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 이므로

$y = 3x - \frac{11}{2}$ $\therefore$ $a = 3, b = -\frac{11}{2}$

$\therefore$ $a + b = 3 - \frac{11}{2} = -\frac{5}{2}$

해설

직선이 두 사각형과 만나는 점은

$\left(\frac{4-b}{a}, 4\right), \left(\frac{7-b}{a}, 7\right)$ 이다.

이제 각각의 오른쪽 사다리꼴의 넓이를 구해보면

ⅰ)□OABC : $\frac{4}{2}((5 + \frac{b}{a}) + (5 - \frac{4b}{a})) = 10$

$\Rightarrow$ $2b - 4 + 5a = 0$

ⅱ)□ODEF : $\frac{7}{2}((6 + \frac{b}{a}) + (6 - \frac{7-b}{a})) = 21$

$\Rightarrow$ $6a + 2b - 7 = 0$

ⅰ)과 ⅱ)를 연립하면

$a = 3, b = -\frac{11}{2}$ $\therefore$ $a + b = 3 - \frac{11}{2} = -\frac{5}{2}$

9. 세 직선 $2x+y+1=0$, $x-y+2=0$, $ax-y=0$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 상수 a 의 값을 구하면? (단, $a>0$)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

삼각형을 만들지 못하게 하려면
$ax-y=0$ 이 나머지 두직선과 평행하거나, 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

ⅰ) $ax-y=0$ 이 다른 두 직선과 평행할 때
두 직선의 기울기가 각각 -2, 1 이므로
$a=-2$ 또는 1 $\quad \therefore\ a=1$ ($\because a>0$)

ⅱ) 세 직선이 한 점에서 만날 때
$2x+y+1=0$ 와 $x-y+2=0$ 의 교점은 $(-1,\ 1)$
$ax-y=0$ 이 이 점을 지나려면
$a=-1$ (부적당)

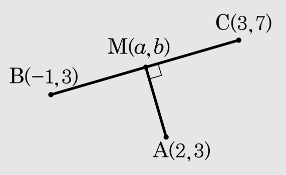
ⅰ), ⅱ) 에서 $a=1$

10. 점 A(2, 3) 에서 두 점 B(−1, 3) , C(3, 7) 을 이은 선분 BC 에 내린 수선의 발을 M(a, b) 라 할 때, $4ab$ 의 값은?

① 7　　② 9　　③ 11　　④ 13　　⑤ 15

해설

$\overline{\mathrm{BC}} \perp \overline{\mathrm{AM}}$ 이므로 두 직선의 기울기의 곱은 −1 이다.



즉, $\dfrac{7-3}{3-(-1)} \times \dfrac{b-3}{a-2} = -1$

$b-3 = -(a-2)$,　 $\therefore\ a+b=5 \cdots$ ㉠

한편, 직선 BC 의 방정식은

$y-3 = \dfrac{7-3}{3-(-1)}(x+1)$

$\therefore\ y = x+4$

이 때, 점 M 이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 위의 점이므로

$b = a+4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{9}{2}$

$\therefore\ 4ab = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{2} = 9$

11. 직선 $2x+4y+1=0$에 평행하고, 두 직선 $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$의 교점을 지나는 직선을 $y=ax+b$라 할 때 $2a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

직선 $2x+4y+1=0$의 기울기는

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ 에서 $-\frac{1}{2}$

또, $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$을 연립하여 풀면

$x=-4,\ y=3$

$y-3=-\frac{1}{2}(x+4)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+1$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=1$

$\therefore\ \ 2a+b=0$

12. 두 직선 $x+y=3$, $mx-y+2m-5=0$이 제 1사분면에서 만날 때, m의 값의 범위는?

① $-2<m<2$ ② $-2<m<3$ ③ $-1<m<2$

④ $1<m<4$ ⑤ $0<m<3$

해설

$mx-y+2m-5=0\cdots$①에서
$m(x+2)-(y+5)=0$이므로
위의 직선은 m의 값에 관계없이
점 $(-2,-5)$를 지나고, 기울기 m인 직선이다.
따라서 두 직선이 제 1사분면에서
만나기 위해서는 직선 ①이 $(3,0)$과 $(0,3)$을
잇는 선분의 사이를 지나면 된다.
직선 ①이 $(3,0)$을 지날 때 $m=1$이고
$(0,3)$을 지날 때 $m=4$이므로
따라서 $1<m<4$

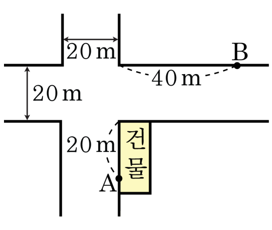
13. 직선 $(k-2)x+(2k-3)y+4k-3=0$이 실수 k의 값에 관계없이 한 점 (a,b)를 지날 때 ab의 값을 구하면?

① 20 ② 10 ③ -10 ④ -20 ⑤ -30

해설

주어진 식을 k에 대해 정리하면
$(2y+x+4)k-2x-3y-3=0$이고
임의의 k에 대해 성립하려면
$2y+x+4=0,\quad 2x+3y+3=0$
연립하면 $x=6,\quad y=-5$
$\therefore\ ab=-30$

14. 다음 그림과 같이 폭이 20 m 인 인도가 수직으로 만나고 있다. A 지점에 서 있는 사람이 B 지점에 있는 가로등을 보기 위하여 움직여야 할 최소 거리는?(단위는 m)

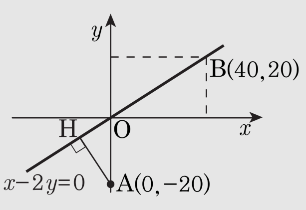


① $2\sqrt{10}$　　② $4\sqrt{10}$　　③ $6\sqrt{5}$

④ $8\sqrt{5}$　　⑤ $10\sqrt{3}$

해설

그림과 같이 건물의 모서리를 원점으로 하는
좌표축을 생각하면 A, B 지점의 좌표는
각각$(0, -20)$, $(40,\ 20)$ 이다. 이때, 원점과



점 B 를 지나는 직선의 방정식이 $x-2y=0$
이므로 가로등을 보기 위하여 움직여야 할
최소거리는 점 A 와 직선 $x-2y=0$
사이의 거리이다. $\therefore\ \overline{\mathrm{AH}} = \dfrac{|1\cdot 0 - 2\cdot(-20)|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 8\sqrt{5}$

15. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

$$3x-y-6=0\ ,\qquad 3x-y+k=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=4$

해설

직선 $3x-y-6=0$ 위의 한 점 $(2,0)$ 에서 직선 $3x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$$\frac{|3\times 2-0+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|6+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

$|6+k|=10$

따라서 $k=4$ ($\because$ k 는 양수)

16. 원점에서의 거리가 1이고, 점 $(1, 2)$를 지나는 직선의 방정식이 $ax + by + c = 0$으로 표현될 때, $a + b + c$의 값을 구하면? (단, $b \neq 0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점 $(1, 2)$를 지나는 직선은
$y = m(x-1) + 2$ 에서,
$mx - y - m + 2 = 0 \cdots$ ㉠
여기서 $(0, 0)$에 이르는 거리가 1이므로
$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = 1,\ |m-2| = \sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면, $m = \frac{3}{4}$
㉠에 대입하여 정리하면, $\frac{3}{4}x - y + \frac{5}{4} = 0,$
$3x - 4y + 5 = 0$
$\therefore\ a + b + c = 3 - 4 + 5 = 4$

17. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y-3+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x-y-3+k(x+y)=0$ 에서

$(k+1)x+(k-1)y-3=0$

원점에서 이 직선까지의 거리

$f(k)=\frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$

$=\frac{3}{\sqrt{2(k^2+1)}}$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때

최대가 되므로 $f(k)$ 의 최대값은

$k=0$ 일 때 $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

18. 세 직선 $2x-y-4=0$, $3x-4y+9=0$, $4x+3y+12=0$ 으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

① 10　② 15　③ 20　④ 25　⑤ 30

해설

$2x-y-4=0 \cdots\cdots$ ㉠
$3x-4y+9=0 \cdots\cdots$ ㉡
$4x+3y+12=0 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=5,\ y=6$
㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=0,\ y=-4$
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-3,\ y=0$
세 직선 $2x-y-4=0$, $3x-4y+9=0$, $4x+3y+12=0$ 으로 이루어지는
삼각형은 세 점 $A(5,\ 6)$, $B(0,-4)$, $C(-3,0)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 이다.
따라서 점 $(5,\ 6)$ 과 직선 $4x+3y+12=0$
사이의 거리는 $\dfrac{|4\times5+3\times6+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|50|}{5}=10$
또, $\overline{BC}=\sqrt{(-3-0)^2+(0+4)^2}=5$
따라서 $\triangle$ABC 의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times5\times10=25$

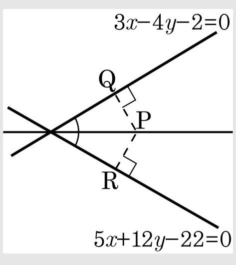
19. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

20. 세 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ -3)$, $\mathrm{C}(5,\ 3)$에 대하여 등식 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=2\overline{\mathrm{CP}}^2$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax+y+b=0$이다. 이 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 하면
주어진 조건에서,
$(x+1)^2+y^2+(x-2)^2+(y+3)^2$
$=2\{(x-5)^2+(y-3)^2\}$
$2x^2-2x+2y^2+6y+14$
$=2(x^2-10x+y^2-6y+34)$
$18x+18y-54=0$
$\Rightarrow\quad x+y-3=0$
$\therefore\ a+b=1+(-3)=-2$