1. $a^2+b^2+c^2=9,\ ab+bc+ca=9,\ a+b+c$의 값은?

① $-3\sqrt{2}$ ② $-2\sqrt{3}$ ③ $\pm3\sqrt{3}$
④ $\pm3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
$$=9+18=27$$
$\therefore\ a+b+c=\pm3\sqrt{3}$

2. $x^2 + y^2 + 2xy - x - y$을 인수분해 하면?

① $(x-y)(x+y+1)$
② $(x+y)(x-y-1)$
③ $(x-y)(x-y-1)$
④ $(x+y)(x+y-1)$
⑤ $(x+y)(x+y+1)$

해설

$x^2 + y^2 + 2xy - x - y$
$= (x+y)^2 - (x+y) = (x+y)(x+y-1)$

3. $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b의 값은?

① $a=12,\ b=9$
② $a=-12,\ b=9$
③ $a=12,\ b=-9$
④ $a=-12,\ b=-9$
⑤ $a=9,\ b=12$

해설

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$ 으로 놓으면
이 식의 우변은
$x^4+2x^2(px+q)+(px+q)^2$
$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$
좌변과 계수를 비교하면
$2p=4,\ p^2+2q=-2$
$p=2,\ q=-3$에서
$a=2pq=-12,\ b=q^2=9$

4. $x=1+2i$, $y=\frac{1+2i}{1-i}$, $z=\frac{1-2i}{1-i}$ 일 때,$xy+xz$ 의 값을 구하면?

① $-1+3i$ ② $-1-2i$ ③ $-1+2i$
④ $-1-i$ ⑤ $-1+i$

해설

$x=1+2i,\ y=\frac{1+2i}{1-i},\ z=\frac{1-2i}{1-i}$

$$\begin{aligned}\therefore\ xy+xz&=\frac{(1+2i)^2}{1-i}+\frac{(1-2i)(1+2i)}{1-i}\\&=\frac{-3+4i+5}{1-i}\\&=\frac{2+4i}{1-i}\\&=-1+3i\end{aligned}$$

5. $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$ 일 때, $z_1^3 + z_2^3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $4 - 2i$　　② 0　　③ 20

④ $-2 + 4i$　　⑤ -4

해설

$z_1 + z_2 = 2,\ z_1 z_2 = 2$

$$z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)^3 - 3z_1 z_2 (z_1 + z_2)$$
$$= 8 - 12$$
$$= -4$$

6. 복소수 $z = i(a + \sqrt{5}i)^2$ 이 $z = \bar{z}$ 가 되도록 실수 a 의 값을 구하면?

① 5　② $\sqrt{5}$　③ 0　④ ± 5　⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

$z = i(a^2 - 5 + 2a\sqrt{5}i)$
$\quad = -2a\sqrt{5} + (a^2 - 5)i$
$z = \bar{z}$ 이면 실수이므로 허수부분이 0이다.
$\therefore\ a = \pm\sqrt{5}$

7. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 \\ &= (x^2+3x)+(2x+6) \\ &= x^2+(3x+2x)+6 \\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

① 교환법칙, 결합법칙
② 교환법칙, 분배법칙
③ 분배법칙, 결합법칙
④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙
⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 \ (\text{분배}) \\ &= (x^2+3x)+(2x+6) \ (\text{분배}) \\ &= x^2+(3x+2x)+6 \quad (\text{결합}) \\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

8. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$를 $x^2 + x + 1$로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a의 값을 구하면?

① -3 ② 3 ③ -6 ④ 6 ⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.
$\therefore a - 3 = 0, a = 3$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$이 되는 x값을 대입한다.
$x^2 + x + 1 = 0$에서 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0,\ x^3 - 1 = 0$
$\therefore x^3 = 1$
준 식의 좌변에 $x^3 = 1,\ x^2 = -x - 1$을 대입하면
$2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0,\ a - 3 = 0$
$\therefore\ a = 3$

9. x에 대한 항등식 $\frac{x^2-3x-1}{x-1}-\frac{x^2-x-3}{x+1}+\frac{2}{x}=\frac{Ax+B}{x(x-1)(x+1)}$에서 $A-B$의 값을 수치대입법을 이용하여 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

분모를 간단히 할 수 있는 숫자를 대입해 보자.
양변에 $x=2,\ x=-2$를 대입해서 정리하면
$x=2$일 때
$\frac{4-6-1}{1}-\frac{4-2-3}{3}+\frac{2}{2}=\frac{2A+B}{2\times1\times3}$
$-3+\frac{1}{3}+1=\frac{2A+B}{6}$
$\therefore\ 2A+B=-10\cdots$㉠
$x=-2$일 때
$\frac{4+6-1}{-3}-\frac{4+2-3}{-1}+\frac{2}{-2}=\frac{-2A+B}{(-2)(-3)(-1)}$
$-3+3-1=\frac{-2A+B}{-6}$
$\therefore\ -2A+B=6\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $A=-4,\ B=-2$
$\therefore\ A-B=(-4)-(-2)=-2$

10. $(x^3+2x^2-3x+2)^4(2x-1)^7$ 을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x^3+2x^2-3x+2)^4\cdot(2x-1)^7$
$= a_0x^{19}+a_1x^{18}+a_2x^{17}+\cdots+a_{19}$ 로 놓으면
계수들의 총합 $a_0+a_1+\cdots+a_{19}$ 는 양변에 $x=1$ 을 대입한 결과와 같으므로 항등식의 성질에서
$(1+2-3+2)^4\cdot(2-1)^7=2^4=16$

11. 두 다항식 $f(x) = x^2+3x+a$, $g(x) = x^3+ax$를 $x+2$로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

해설

$f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$에서

$f(-2) = g(-2)$ 이므로

$4 - 6 + a = -8 - 2a$

$\therefore\ a = -2$

12. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x+2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$ 라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

13. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형
② 이등변삼각형
③ 정삼각형
④ 직각이등변삼각형
⑤ 둔각삼각형

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$에서

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)=0$

$\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$a,\ b,\ c$는 실수이므로

$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

14. $\sqrt{(y-x)^2}+(y-1)i=-2x-3i$ 를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$|y-x|+(y-1)i=-2x-3i$

$|y-x|=-2x$

$y-1=-3 \quad \therefore\ y=-2$

(i) $y \geq x$ 일 때

$y-x=-2x,\ y=-x,\ x=2$ (모순)

(ii) $y < x$ 일 때

$x-y=-2x,\ y=3x$

$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ (성립)

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$

15. $\alpha,\ \beta$ 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $\overline{\alpha},\ \overline{\beta}$ 는 각각 $\alpha,\ \beta$ 의 켤레복소수이고 $i=\sqrt{-1}$)

㉠ $\alpha=\overline{\beta}$ 이면, $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.
㉡ $\alpha=\overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 이다.
㉢ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.
㉣ $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.

① ㉡,㉢　② ㉠,㉡,㉢　③ ㉠,㉡,㉣
④ ㉠,㉡　⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣

해설

$\alpha=a+bi,\ \beta=a-bi$ ($a,\ b$ 는 실수)
㉠ $\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=a^2+b^2$
㉡ $\alpha\beta=0$, $a^2+b^2=0$, $a=0,\ b=0$
㉢ (반례) $\alpha=1,\ \beta=i$
㉣ (반례) $\alpha=1,\ \beta=i$

16. $x+\frac{1}{x}=1$ 일때, $x^5+\frac{1}{x^5}$ 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 7

해설

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=1-2=-1$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{1}\right)=1-3=-2$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^5+\frac{1}{x^5}+x+\frac{1}{x}$

$(-1)\times(-2)=x^5+\frac{1}{x^5}+1$

$\therefore\ x^5+\frac{1}{x^5}=1$

해설

$x+\frac{1}{x}=1$ 의 양변에 x를 곱하면

$x^2-x+1=0,\ (x+1)(x^2-x+1)=0,$

$x^3+1=0,\ x^3=-1,\ \frac{1}{x^3}=-1$

$x^5+\frac{1}{x^5}=-x^2-\frac{1}{x^2}=-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

$=-(-1)=1$

17. 다항식 $f(x)$를 $\left(x-\frac{2}{3}\right)$로 나눌때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, 다음 중 $f(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

① $Q(x)$, R ② $3Q(x)$, R ③ $Q(x)$, $3R$
④ $\frac{1}{3}Q(x)$, R ⑤ $Q(x)$, $\frac{1}{3}R$

해설

$$f(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$$
$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R$$
$$=(3x-2)\frac{1}{3}Q(x)+R$$

이므로 구하는 몫과 나머지는

몫: $\frac{1}{3}Q(x)$ 나머지: R

18. $\dfrac{2^{40}-2^{35}-2^5+1}{2^{35}-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$2^5 = x$라 두면

$$\frac{2^{40}-2^{35}-2^5+1}{2^{35}-1} = \frac{x^8-x^7-x+1}{x^7-1}$$
$$= \frac{(x-1)(x^7-1)}{x^7-1}$$
$$= x-1 = 2^5-1 = 31$$

19. 두 다항식 x^3+ax^2+bx+1과 x^3+bx^2+ax+1의 최대공약수가 일차식일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$A(x)=x^3+ax^2+bx+1$, $B(x)=x^3+bx^2+ax+1$로 놓으면
$A(x)-B(x)$
$=(x^3+ax^2+bx+1)-(x^3+bx^2+ax+1)$
$=(a-b)x(x-1)$
$A(x)$, $B(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 최대공약수는 x이거나 $x-1$이 될 수 있지만 두 다항식의 상수항이 1이므로 최대공약수는 $x-1$이다.
따라서 다항식 $A(x)$는 $x-1$을 인수로 가지므로 나머지정리에 의하여
$A(1)=1+a+b+1=0$
$\therefore\ a+b=-2$

20. 집합 $A = \{z \mid z = a+bi, a^2+b^2 = 1, a, b\text{는 실수}\}$ 일 때, 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $1-i \in A$

㉡ $z \in A$ 이면 $\overline{z} \in A$

㉢ $z_1 \in A,\ z_2 \in A$ 이면 $z_1 z_2 \in A$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $1-i \rightarrow a = 1, b = -1$

$a^2 + b^2 = 2 \neq 1$

㉡ $z = a+bi,\ \overline{z} = a-bi$

$a^2 + (-b)^2 = a^2 + b^2 = 1$

$\therefore \overline{z} \in A$

㉢ $z_1 = a+bi,\ z_2 = c+di$ 라 하면

$z_1 z_2 = (ac-bd) + (bc+ad)i$

$(ac-bd)^2 + (bc+ad)^2$

$= (ac)^2 + (bd)^2 + (bc)^2 + (ad)^2$

$= a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2)$

$= (a^2+b^2)(c^2+d^2) = 1$

$\therefore\ z_1 z_2 \in A$