

2. $x^2 + x - 1 = 0$ 일 때, $x^5 - 5x$ 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

$x^5 - 5x$ 를 $x^2 + x - 1$ 로 나누면
즉, $x^5 - 5x = (x^2 + x - 1) \times \text{몫} - 3$
 $x^2 + x - 1 = 0$
 $\therefore x^5 - 5x = -3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.

$$\begin{aligned}x^2 &= -x + 1 \\x^5 - 5x &= (x^2)^2 \times x - 5x \\&= x(-x + 1)^2 - 5x \\&= x^3 - 2x^2 - 4x \\&= x(-x + 1) - 2(-x + 1) - 4x \\&= -x^2 - x - 2 \\&= -(x^2 + x) - 2 \\&= -1 - 2 = -3\end{aligned}$$

3. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x 에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ 의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \dots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

- ① 0 ② -1 ③ 1 ④ -10 ⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면,

$$(\text{우변}) = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{10})x^9 + \dots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$

양변의 계수를 비교하면

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 0$$

4. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x) + (1+x+x^2+x^3)^3$$

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

- i) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수
: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,
계수= 2
: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x 를 곱할 때,
계수= 1
- ii) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수
 $x+x^2+x^3=Y$ 라 하면,
 $(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$
 $3Y=3x+3x^2+3x^3$
일차항의 계수= 3, 다른 항에는 일차항이 없다.
- i), ii)에서 $2+1+3=6$

5. 세 변의 길이가 a, b, c 인 $\triangle ABC$ 에 대하여 $a^2 - ab + b^2 = (a+b-c)c$ 인 관계가 성립할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$$a^2 - ab + b^2 = (a+b-c)c \text{에서 } a^2 - ab + b^2 = ac + bc - c^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \left\{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right\} = 0$$

$$\therefore a = b = c$$

따라서, $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.

6. $a + b + c = 7$, $a^2 + b^2 + c^2 = 21$, $abc = 8$ 일 때, $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ 의 값은?

- ① 26 ② 48 ③ 84 ④ 96 ⑤ 112

해설

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ 49 &= 21 + 2(ab + bc + ca) \\ \therefore ab + bc + ca &= 14 \\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) \\ &= (14)^2 - 2(8 \times 7) \\ &= 84\end{aligned}$$

7. $x + \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^{101} + \frac{1}{x^{101}}$ 의 값은?

- ① 1 ② -1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 101

해설

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{ 에서 } x^2 + 1 = x$$

$$\therefore x^2 - x + 1 = 0, x^3 = -1$$

$$\begin{aligned} (\text{준 식}) &= (x^3)^{33} \cdot x^2 + \frac{1}{(x^3)^{33} \cdot x^2} \\ &= -x^2 + \frac{-1}{x^2} = -\frac{x^4 + 1}{x^2} = -\frac{-x + 1}{x^2} \\ &= \frac{x - 1}{x^2} = 1 \end{aligned}$$

8. 등식 $\frac{2x^2+13x}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$ 가 x 에 대한 항등식이 되도록 상수 A, B, C 의 값을 정할 때, $A+B+C$ 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

양변에 $(x+2)(x-1)^2$ 을 곱하면
 $2x^2+13x = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$ 에서
 $x=1, -2, 0$ 을 차례로 대입하여 A, B, C 를 구하면
 $B=5, C=-2, A=4$
 $\therefore A+B+C=7$

9. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^{2007} + 1 = a_0 + a_1(x+4) + a_2(x+4)^2 + \dots + a_{2007}(x+4)^{2007}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2007}$ 의 값은?

- ① $(-3)^{2007} + 1$ ② 0 ③ $3^{2007} + 1$
④ 1 ⑤ $3^{2007} + 3$

해설

양변에 $x = -3$ 을 대입하면

$$(-3)^{2007} + 1 = a_0 + a_1 + \dots + a_{2007}$$

10. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면 $Q(x)$ 의 계수의 총합(상수항 포함)과 R 과의 차는?

- ① $\frac{1}{2}(3^{29} + 1)$ ② $\frac{1}{2} \cdot 3^{30}$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30} - 1)$
④ $\frac{1}{2}(3^{30} + 1)$ ⑤ $\frac{1}{2}(3^{29} - 1)$

해설

$$x^{30} = (x-3)Q(x) + R$$

$$x = 3 \text{을 대입하면 } 3^{30} = R$$

$Q(x)$ 의 계수의 총합은 $Q(1)$ 과 같으므로

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 = -2Q(1) + 3^{30}$$

$$\therefore Q(1) = \frac{3^{30} - 1}{2}$$

$$\therefore R - Q(1) = 3^{30} - \frac{3^{30} - 1}{2} = \frac{3^{30} + 1}{2} = \frac{1}{2}(3^{30} + 1)$$

11. 이차식 $f(x)$ 를 각각 $x-3, x+1$ 로 나눈 나머지는 같고, $f(1) = 0$ 일 때,

$$\frac{f(4)}{f(-4)} = \frac{n}{m} \quad (m, n \text{은 서로소}) \text{이다. 이 때, } m+n \text{의 값을 구하여라.}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖는다.

$$\therefore f(x) = (x-1)(ax+b)$$

$$f(3) = f(-1) \text{ 이므로 } 2(3a+b) = -2(-a+b)$$

$$\therefore a = -b$$

$$\frac{f(4)}{f(-4)} = \frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)} = \frac{-9b}{-25b} = \frac{9}{25}$$

$$\therefore m = 25, n = 9$$

12. $\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$ 은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\begin{aligned} & x = 21 \text{ 이라 하면} \\ & \sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1} \\ & = \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3) + 1} \\ & = \sqrt{(x(x+3))(x+1)(x+2) + 1} \\ & = \sqrt{(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1} \\ & = \sqrt{(x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) + 1} \\ & = \sqrt{(x^2 + 3x + 1)^2} \\ & = x^2 + 3x + 1 \quad (\because (x^2 + 3x) + 1 > 0) \\ & = 21^2 + 3 \cdot 21 + 1 = 505 \\ & \text{각자리 숫자의 합은 } 5 + 0 + 5 = 10 \end{aligned}$$

13. $a(a+1) = 1$ 일 때, $\frac{a^6-1}{a^4-a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$$\begin{aligned}\frac{a^6-1}{a^4-a^2} &= \frac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)} \\ &= \frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2 = 1-a \text{ 대입} \\ &= \frac{2(1-a) \times 2}{1-a} = 4\end{aligned}$$

14. A 를 B 로 나눈 몫을 Q , 나머지를 R 라 하고, Q 를 B' 으로 나눈 몫은 Q' , 나머지는 R' 이라 한다. A 를 BB' 으로 나눈 나머지는? (단, 모든 문자는 자연수이다.)

- ① $R + R'B$ ② $R' + RB$ ③ RR'
 ④ R ⑤ R'

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면
 $A = BQ + R \dots\dots ㉠$
 $Q = B'Q' + R' \dots\dots ㉡$
 ㉡을 ㉠에 대입하면
 $A = B(B'Q' + R') + R$
 $= (BB')Q' + (R + R'B)$
 $R + R'B$ 가 A 를 BB' 로 나눈 나머지가 되기 위해서는 $R + R'B < BB'$ 이어야 한다.
 그런데 $R \leq B - 1, R' \leq B' - 1$ 이므로
 $R + R'B \leq (B - 1) + (B' - 1)B$
 $= BB' - 1 < BB'$
 따라서 A 를 BB' 으로 나눈 나머지는 $R + R'B$ 이다.

15. $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=4$ 일 때, $x^4+y^4+z^4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \\ 0 &= 4+2(xy+yz+zx) \\ \therefore xy+yz+zx &= -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(xy+yz+zx)^2 &= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(xy^2z+xyz^2+x^2yz) \\ &= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z) \\ 4 &= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+0 \\ \therefore x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2)^2 &= x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \\ 16 &= x^4+y^4+z^4+2\cdot 4 \\ \therefore x^4+y^4+z^4 &= 8\end{aligned}$$

16. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-2007)}$$
$$= \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{2007}}{x-2007}$$

이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007}$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② -1 ③ 1997
④ 0 ⑤ -1997

해설

우변을 통분하면

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007})x^{2006} + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-2007)}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-2007)}$$

주어진 등식은 항등식이므로 분자의 계수를 비교하면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007} = 0$$

17. x 의 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 u, v 에 대하여 $f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$ 가 성립할 때, $f(3)$ 의 값은? (단, $f(1) = 1$ 이라고 한다.)

- ① -1 ② 2 ③ -2 ④ 1 ⑤ 5

해설

$f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$ 가
 u, v 에 대한 항등식이므로
 $u = 1, v = 0$ 일 때도 이 등식이 성립한다.
 $\therefore f(1)f(0) = f(1) + f(1)$
 $f(1) = 1$ 이므로 $f(0) = 2$
또, $u = v = 1$ 일 때는
 $f(1)f(1) = f(2) + f(0) \quad \therefore f(2) = -1$
 $\therefore f(3) = f(2+1) = f(2)f(1) - f(2-1)$
 $= f(2)f(1) - f(1) = -1 - 1$
 $= -2$

18. 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(-1) = f(1) = f(2) = 3$ 일 때 $f(-2)$ 의 값은?

- ① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

해설

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2) + 3$$
$$\therefore f(-2) = -9$$

해설

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{라 하면}$$

i) $f(-1) = 3$ 에서 $a - b + c - 1 = 3$
ii) $f(1) = 3$ 에서 $a + b + c + 1 = 3$
iii) $f(2) = 3$ 에서 $4a + 2b + c + 8 = 3$
위의 세식을 연립하여 풀면,
 $a = -2, b = -1, c = 5$
 $\therefore f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$
 $\therefore f(-2) = -8 - 8 + 2 + 5 = -9$

19. $P(x) = x^2 + x + 1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x - 4$

② $4x - 1$

③ 5

④ 4

⑤ 3

해설

$$P(x^6) = x^{12} + x^6 + 1$$

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 해를 w 라 하자.

$w^2 + w + 1 = 0$, 양변에 $(w - 1)$ 을 곱하면

$$w^3 - 1 = 0, w^3 = 1$$

$$x^{12} + x^6 + 1 = (x^2 + x + 1)Q(x) + ax + b \text{ 에}$$

w 를 대입하면,

$$(w^3)^4 + (w^3)^2 + 1 = (w^2 + w + 1)Q(w) + aw + b$$

$$3 = aw + b$$

w 는 허수, a, b 는 실수 이므로, $a = 0, b = 3$

\therefore 나머지 = 3

20. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 할 때, $Q(x)$ 의 계수의 총합(상수항 포함)과 R 와의 차는?

- ① $\frac{1}{2}(3^{30} + 1)$ ② $\frac{1}{2} \cdot 2^{30}$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30} - 1)$
 ④ $2(3^{30} + 1)$ ⑤ $2(3^{30} - 1)$

해설

문제의 조건으로부터

$$x^{30} = (x-3)Q(x) + R \cdots \text{㉠}$$

이므로 몫 $Q(x)$ 는 29차의 다항식이다.

㉠의 양변에 $x=3$ 을 대입하면 $R=3^{30}$

여기에서 몫은 29차의 다항식이므로

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{29}x^{29}$$

으로 놓으면 $Q(x)$ 의 계수의 총합은

$x=1$ 을 대입한

$$Q(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{29} \text{과 같다.}$$

따라서 구하는 차는 $|Q(1) - R| \cdots \text{㉡}$

한편 ㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 = -2Q(1) + R \therefore Q(1) = \frac{1}{2}(R-1)$$

이 값을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}
 |Q(1) - R| &= \left| \frac{1}{2}(R-1) - R \right| = \frac{|R+1|}{2} \\
 &= \frac{|3^{30} + 1|}{2} = \frac{1}{2}(3^{30} + 1)
 \end{aligned}$$

21. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 는 $x+2$ 로 나누어 떨어지고, $f(x) - g(x)$ 를 $x + 2$ 로 나누었을 때의 나머지는 4이다. [보기]의 다항식 중 $x + 2$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $x + f(x)$ ㉡ $x^2 + f(x)g(x)$
 ㉢ $f(g(x)) - x$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

나머지 정리에 의해 $f(-2) + g(-2) = 0, f(-2) - g(-2) = 4$
 두식을 연립하면, $f(-2) = 2, g(-2) = -2$
 ㉠ : $x + f(x) \rightarrow x = -2$ 를 대입하면
 $-2 + f(-2) = 0$
 ㉡ : $x^2 + f(x)g(x) \rightarrow x = -2$ 를 대입하면 $(-2)^2 + f(-2)g(-2) = 0$
 ㉢ : $f(g(x)) - x \rightarrow x = -2$ 를 대입하면 $f(g(-2)) - (-2) = f(-2) + 2 = 4$

22. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 x^2+1 로 나누면 나누어 떨어지고, $x-3$ 으로 나눌 때의 나머지는 5이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2+1)(x-3)$ 으로 나눌 때의 나머지를 구하면?

- ① $\frac{1}{2}(x^2+1)$ ② $\frac{1}{3}(x^2+1)$ ③ $\frac{1}{5}(x^2+1)$
④ $2x^2-3x+1$ ⑤ $\frac{2}{3}x^2-x+\frac{1}{2}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+1)Q_1(x) \\ f(x) &= (x-3)Q_2(x)+5 \\ \therefore f(3) &= 5 \\ f(x) &= (x^2+1)(x-3)Q_3(x)+ax^2+bx+c \\ &= (x^2+1)(x-3)Q_3(x)+a(x^2+1) \\ (\because f(x) \text{는 } x^2+1 \text{로 나누어 떨어지므로}) \\ &= (x^2+1)((x-3)Q_3(x)+a) \\ x=3 \text{을 대입하면 } f(3) &= 10a=5 \\ \therefore a &= \frac{1}{2} \text{이고 나머지는 } \frac{1}{2}(x^2+1) \end{aligned}$$

23. 다음 식 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a+b$

② $b+c$

③ $c+a$

④ $b-a$

⑤ $-b-c$

해설

전개하여 a 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$

$$= (b+c)a^2 + (b^2+2bc+c^2)a + bc(b+c)$$

$$= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\}$$

$$= (b+c)(a+b)(a+c)$$

\therefore ④ $b-a$ 는 인수가 아니다

24. $-a^2(b-c) - b^2(c-a) - c^2(a-b)$ 을 인수분해했을 때, 각 인수들의 합이 될 수 없는 것은?

- ① $a+b$ ② $2a-2b$ ③ $2b-2a$
 ④ $2b-2c$ ⑤ 0

해설

a 에 대한 내림차순으로 정리한다.
 $-a^2(b-c) - b^2(c-a) - c^2(a-b)$
 $= (c-b)a^2 - (c^2 - b^2)a + bc^2 - b^2c$
 $= (c-b)a^2 - (c-b)(c+b)a + bc(c-b)$
 $= (c-b) \{ a^2 - (c+b)a + bc \}$
 $= (c-b)(a-b)(a-c) \cdots \textcircled{㉠}$
 $= (a-b)(b-c)(c-a) \cdots \textcircled{㉡}$
 $= (b-c)(b-a)(a-c) \cdots \textcircled{㉢}$
 $= (c-a)(b-c)(b-a) \cdots \textcircled{㉣}$
 ㉠식 : 세항을 모두 더하면 $2a-2b$
 ㉡식 : 세항을 모두 더하면 0
 ㉢식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2c$
 ㉣식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2a$

25. $a+b+c=0$, $abc \neq 0$ 일 때, $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= 0(\because a+b+c=0) \\ \therefore & a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \\ \therefore (\text{준식}) &= \frac{a^2+b^2+c^2}{3abc} + \frac{2}{3} \left(\frac{bc+ca+ab}{abc} \right) \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{3abc} = 0 \end{aligned}$$

26. $a-b=2-\sqrt{3}$, $b-c=2+\sqrt{3}$ 인 세 수 a, b, c 에 대하여 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 의 값은?

- ① 4 ② 3 ③ 1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$$\begin{aligned} a-b &= 2-\sqrt{3} \dots\dots\text{㉠} \\ b-c &= 2+\sqrt{3} \dots\dots\text{㉡} \\ \text{㉠}+\text{㉡} \text{을 계산하면 } a-c &= 4 \\ a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) & \\ &= a^2(b-c)+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b \\ &= a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+b^2c-c^2b \\ &= a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c) \\ &= (b-c)(a^2-a(b+c)+bc) \\ &= (b-c)(a-b)(a-c) \\ &= (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) \cdot 4=4 \end{aligned}$$

27. x 에 관한 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여, $(x+1)f(x) = (x-1)g(x)$ 일 때, 다음 중 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최소공배수는?

- ① $(x-1)g(x)$ ② $(x+1)g(x)$ ③ $(x-1)^2g(x)$
④ $(x+1)^2g(x)$ ⑤ $(x-1)^3g(x)$

해설

$(x+1)f(x) = (x-1)g(x) \cdots$ ①
 $x+1$ 과 $x-1$ 이 서로 소이므로
 $x+1$ 은 $g(x)$ 의 인수이다.
따라서 $g(x) = (x+1)h(x) \cdots$ ② 로 놓으면
①에서 $f(x) = (x-1)h(x) \cdots$ ③
②와 ③에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최소공배수는
 $(x-1)(x+1)h(x)$ 즉, $(x-1)g(x)$

28. 두 다항식 $f(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$, $g(x) = 2x^3 - (a+2)x^2 - ax + 2a$ 의 최대공약수가 이차식이다. 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

해설

$g(1) = 0$ 이므로 $g(x)$ 는 $x-1$ 를 인수로 갖는다. 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -(a+2) & -a & 2a \\ & & 2 & -a & -2a \\ \hline & 2 & -a & -2a & 0 \end{array}$$

$$g(x) = (x-1)(2x^2 - ax - 2a)$$

$$f(x) = (x-1)(x+1)(x+2) \text{ 이므로}$$

최대공약수는 $(x-1)(x+1)$ 또는 $(x-1)(x+2)$

i) $(x-1)(x+1)$ 일 때

$$2(-1)^2 - a(-1) - 2a = 0 \text{ 에서 } a = 2$$

$$\therefore g(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2)$$

ii) $(x-1)(x+2)$ 일 때

$$2(-1)^2 - a(-2) - 2a = 0 - 8 \neq 0$$

i), ii) 에서

$$g(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2) \text{ 이고 } a = 2$$

29. x^2 의 계수가 1인 세 이차식 A, B, C 가 다음 세 조건을 모두 만족할 때, 이차식 A 는?

- ㉠ A, B 의 최대공약수는 $x+1$ 이다.
㉡ B, C 의 최대공약수는 $x-2$ 이다.
㉢ A, C 의 최소공배수는 x^3+2x^2-5x-6 이다.

- ㉠ x^2+4x+3 ㉡ x^2-x-2 ㉢ x^2+x-6
㉣ x^2+5x+6 ㉤ x^2+2x-3

해설

A, B 의 최대공약수는 $x+1$ 이므로
 $A = a(x+1), B = b(x+1)$
 B, C 의 최대공약수는 $x-2$ 이므로
 $B = (x-2)(x+1), C = c(x-2)$
 A, C 의 최소공배수는
 $x^3+2x^2-5x-6 = (x+3)(x-2)(x+1)$
따라서 A, C 의 최대공약수는 $(x+3)$ 이고
 $A = (x+3)(x+1) = x^2+4x+3$

30. 두 다항식 $x^3 - ax^2 - bx + 1$, $x^3 + bx^2 + ax + 1$ 의 최대공약수가 x 에 대한 일차식일 때, 상수 a, b 에 대하여 $a - b$ 의 값은?

- ① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

최대공약수를 $(x - \alpha)$ 라 하자. 인수정리에 의해

$$\alpha^3 - a\alpha^2 - b\alpha + 1 = 0 \quad \dots \text{①}$$

$$\alpha^3 + b\alpha^2 + a\alpha + 1 = 0 \quad \dots \text{②}$$

$$\text{②} - \text{①} = (b + a)\alpha^2 + (a + b)\alpha$$

$$= (a + b)\alpha(\alpha + 1) \dots \dots \text{③}$$

$a + b = 0$ 이면 두 다항식이 같아지므로 조건에 맞지 않는다

③에서 $\alpha(\alpha + 1) = 0 \therefore \alpha = 0$ 또는 -1

i) $\alpha = 0$ 을 ①에 대입: $1 = 0 \Rightarrow$ 성립하지 않는다.

ii) $\alpha = -1$ 을 ①에 대입: $-1 - a + b + 1 = 0$

$$\therefore a - b = 0$$