1. 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라.(인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 49 개

해설

$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$

$\therefore \ N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$

$= (35+1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6$

$\therefore$ 약수의 개수 $= (6+1) \times (6+1) = 49$

2. $x^2+x-1=0$ 일 때, x^5-5x 의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

x^5-5x 를 x^2+x-1 로 나누면

즉, $x^5-5x=(x^2+x-1)\times$ 몫-3

$x^2+x-1=0$

$\therefore\ x^5-5x=-3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.

$x^2=-x+1$

$$\begin{aligned} x^5-5x &= (x^2)^2\times x-5x \\ &= x(-x+1)^2-5x \\ &= x^3-2x^2-4x \\ &= x(-x+1)-2(-x+1)-4x \\ &= -x^2-x-2 \\ &= -(x^2+x)-2 \\ &= -1-2=-3 \end{aligned}$$

3. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

① 0 ② -1 ③ 1 ④ -10 ⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면,

$$(\text{우변}) = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})x^9 + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$

양변의 계수를 비교하면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$$

4. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x)+(1+x+x^2+x^3)^3$$

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

i) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수

: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,

계수$=2$

: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x를 곱할 때,

계수$=1$

ii) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수

$x+x^2+x^3=Y$라 하면,

$(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$

$3Y=3x+3x^2+3x^3$

일차항의 계수$=3$, 다른 항에는 일차항이 없다.

i), ii) 에서 $2+1+3=6$

5. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle ABC$에 대하여 $a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$ 인 관계가 성립할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 정삼각형

해설

$a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$에서 $a^2-ab+b^2=ac+bc-c^2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

6. $a+b+c=7$, $a^2+b^2+c^2=21$, $abc=8$일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값은?

① 26　② 48　③ 84　④ 96　⑤ 112

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^c+2(ab+bc+ca)$

$49=21+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=14$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

$=(14)^2-2(8\times 7)$

$=84$

7. $x + \dfrac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^{101} + \dfrac{1}{x^{101}}$ 의 값은?

① 1 ② -1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 101

해설

$x + \dfrac{1}{x} = 1$에서 $x^2 + 1 = x$

$\therefore \; x^2 - x + 1 = 0,\; x^3 = -1$

$$(\text{준 식}) = (x^3)^{33} \cdot x^2 + \frac{1}{(x^3)^{33} \cdot x^2}$$

$$= -x^2 + \frac{-1}{x^2} = -\frac{x^4 + 1}{x^2} = -\frac{-x + 1}{x^2}$$

$$= \frac{x - 1}{x^2} = 1$$

8. 등식 $\dfrac{2x^2+13x}{(x+2)(x-1)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x+2}$ 가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 $A,\ B,\ C$의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

양변에 $(x+2)(x-1)^2$을 곱하면

$2x^2+13x = A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$에서

$x=1,\ -2,\ 0$을 차례로 대입하여 $A,\ B,\ C$를 구하면

$B=5,\ C=-2,\ A=4$

$\therefore\ A+B+C=7$

9. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{2007}+1=a_0+a_1(x+4)+a_2(x+4)^2+\cdots+a_{2007}(x+4)^{2007}$이 성립할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값은?

① $(-3)^{2007}+1$ ② 0 ③ $3^{2007}+1$

④ 1 ⑤ $3^{2007}+3$

해설

양변에 $x=-3$을 대입하면

$(-3)^{2007}+1=a_0+a_1+\cdots+a_{2007}$

10. x^{30}을 $x-3$으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 $Q(x)$의 계수의 총합(상수항 포함)과 R과의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{29}+1)$　② $\frac{1}{2}\cdot 3^{30}$　③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$　⑤ $\frac{1}{2}(3^{29}-1)$

해설

$x^{30}=(x-3)Q(x)+R$

$x=3$을 대입하면 $3^{30}=R$

$Q(x)$의 계수의 총합은 $Q(1)$과 같으므로

$x=1$을 대입하면 $1=-2Q(1)+3^{30}$

$$\therefore\ Q(1)=\frac{3^{30}-1}{2}$$

$$\therefore\ R-Q(1)=3^{30}-\frac{3^{30}-1}{2}=\frac{3^{30}+1}{2}=\frac{1}{2}(3^{30}+1)$$

11. 이차식 $f(x)$를 각각 $x-3, x+1$로 나눈 나머지는 같고, $f(1)=0$일 때, $\dfrac{f(4)}{f(-4)}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소)이다. 이 때, $m+n$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 34

해설

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$\therefore\ f(x)=(x-1)(ax+b)$

$f(3)=f(-1)$ 이므로 $2(3a+b)=-2(-a+b)$

$\therefore\ a=-b$

$$\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)}=\frac{-9b}{-25b}=\frac{9}{25}$$

$\therefore\ m=25,\ n=9$

12. $\sqrt{21\cdot22\cdot23\cdot24+1}$은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x=21$이라 하면

$\sqrt{21\cdot22\cdot23\cdot24+1}$

$=\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$

$=\sqrt{\{x(x+3)\}(x+1)(x+2)+1}$

$=\sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1}$

$=\sqrt{(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1}$

$=\sqrt{\{(x^2+3x)+1\}^2}$

$=x^2+3x+1\ (\because\ (x^2+3x)+1>0)$

$=21^2+3\cdot21+1=505$

각자리 숫자의 합은 $5+0+5=10$

13. $a(a+1)=1$ 일 때, $\dfrac{a^6-1}{a^4-a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\frac{a^6-1}{a^4-a^2}=\frac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)}$$

$$=\frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2=1-a \text{대입}$$

$$=\frac{2(1-a)\times 2}{1-a}=4$$

14. A를 B로 나눈 몫을 Q, 나머지를 R라 하고, Q를 B'으로 나눈 몫은 Q', 나머지는 R'이라 한다. A를 BB'으로 나눈 나머지는? (단, 모든 문자는 자연수이다.)

① $R+R'B$ ② $R'+RB$ ③ RR'

④ R ⑤ R'

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면

$A = BQ + R$ ⋯⋯ ㉠

$Q = B'Q' + R'$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$A = B(B'Q' + R') + R$

$= (BB')Q' + (R + R'B)$

$R + R'B$가 A를 BB'로 나눈 나머지가 되기 위해서는 $R + R'B <$ BB'이어야 한다.

그런데 $R \le B-1$, $R' \le B'-1$이므로

$R + R'B \le (B-1) + (B'-1)B$

$= BB' - 1 < BB'$

따라서 A를 BB'으로 나눈 나머지는 $R + R'B$이다.

15. $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=4$일 때, $x^4+y^4+z^4$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$
$0 = 4+2(xy+yz+zx)$
$\therefore\ xy+yz+zx = -2$

$(xy+yz+zx)^2$
$= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(xy^2z+xyz^2+x^2yz)$
$= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$
$4 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+0$
$\therefore\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = 4$

$(x^2+y^2+z^2)^2 = x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$
$16 = x^4+y^4+z^4+2\cdot 4$
$\therefore\ x^4+y^4+z^4 = 8$

16. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
$$=\frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{x-2}+\cdots+\frac{a_{2007}}{x-2007}$$

이 성립할 때, $a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 1997

④ 0　　⑤ -1997

해설

우변을 통분하면

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{2007})x^{2006}+\cdots}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$

주어진 등식은 항등식이므로 분자의 계수를 비교하면

$a_1+a_2+\cdots+a_{2007}=0$

17. x의 다항식 $f(x)$가 임의의 실수 u, v에 대하여 $f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$가 성립할 때, $f(3)$의 값은? (단, $f(1) = 1$이라고 한다.)

① -1 ② 2 ③ -2 ④ 1 ⑤ 5

해설

$f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$가
u, v에 대한 항등식이므로
$u = 1$, $v = 0$일 때도 이 등식이 성립한다.
$\therefore\ f(1)f(0) = f(1) + f(1)$
$f(1) = 1$이므로 $f(0) = 2$
또, $u = v = 1$일 때는
$f(1)f(1) = f(2) + f(0) \quad \therefore\ f(2) = -1$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(3) &= f(2+1) = f(2)f(1) - f(2-1)\\ &= f(2)f(1) - f(1) = -1 - 1\\ &= -2\end{aligned}$$

18. 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$에 대하여 $f(-1) = f(1) = f(2) = 3$일 때 $f(-2)$의 값은?

① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

해설

$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)+3$

$\therefore\ f(-2) = -9$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$라 하면

i) $f(-1) = 3$에서 $a - b + c - 1 = 3$

ii) $f(1) = 3$에서 $a + b + c + 1 = 3$

iii) $f(2) = 3$에서 $4a + 2b + c + 8 = 3$

위의 세식을 연립하여 풀면,

$a = -2, b = -1, c = 5$

$\therefore\ f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$

$\therefore f(-2) = -8 - 8 + 2 + 5 = -9$

19. $P(x)=x^2+x+1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x-4$ ② $4x-1$ ③ 5

④ 4 ⑤ 3

해설

$P(x^6)=x^{12}+x^6+1$

$x^2+x+1=0$ 의 해를 w 라 하자.

$w^2+w+1=0$, 양변에 $(w-1)$ 을 곱하면

$w^3-1=0$, $w^3=1$

$x^{12}+x^6+1=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$ 에

w 를 대입하면,

$(w^3)^4+(w^3)^2+1=(w^2+w+1)Q(w)+aw+b$

$3=aw+b$

w 는 허수, a, b 는 실수 이므로, $a=0, b=3$

$\therefore$ 나머지$=3$

20. x^{30}을 $x-3$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, $Q(x)$의 계수의 총합(상수항 포함)과 R와의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$ ② $\frac{1}{2}\cdot 2^{30}$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$

④ $2(3^{30}+1)$ ⑤ $2(3^{30}-1)$

해설

문제의 조건으로부터

$x^{30}=(x-3)Q(x)+R\cdots$㉠

이므로 몫 $Q(x)$는 29차의 다항식이다.

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면 $R=3^{30}$

여기에서 몫은 29차의 다항식이므로

$Q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{29}x^{29}$

으로 놓으면 $Q(x)$의 계수의 총합은

$x=1$을 대입한

$Q(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{29}$과 같다.

따라서 구하는 차는 $|Q(1)-R|\cdots$㉡

한편 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1=-2Q(1)+R \therefore\ Q(1)=\frac{1}{2}(R-1)$

이 값을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}|Q(1)-R| &= \left|\frac{1}{2}(R-1)-R\right| = \frac{|R+1|}{2}\\ &= \frac{|3^{30}+1|}{2} = \frac{1}{2}(3^{30}+1)\end{aligned}$$

21. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 는 $x+2$ 로 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 4 이다. [보기] 의 다항식 중 $x+2$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $x+f(x)$　　㉡ $x^2+f(x)g(x)$

㉢ $f(g(x))-x$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

나머지 정리에 의해 $f(-2)+g(-2)=0, f(-2)-g(-2)=4$
두식을 연립하면, $f(-2)=2,\ g(-2)=-2$
㉠ : $x+f(x) \to x=-2$를 대입하면
$-2+f(-2)=0$
㉡ : $x^2+f(x)g(x) \to x=-2$를 대입하면 $(-2)^2+f(-2)g(-2)=0$
㉢ : $f(g(x))-x \to x=-2$를 대입하면 $f(g(-2))-(-2)=f(-2)+2=4$

22. x에 대한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나누어 떨어지고, $x-3$으로 나눌 때의 나머지는 5이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-3)$으로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $\frac{1}{2}(x^2+1)$ ② $\frac{1}{3}(x^2+1)$ ③ $\frac{1}{5}(x^2+1)$
④ $2x^2-3x+1$ ⑤ $\frac{2}{3}x^2-x+\frac{1}{2}$

해설

$f(x)=(x^2+1)Q_1(x)$
$f(x)=(x-3)Q_2(x)+5$
$\therefore\ f(3)=5$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+1)(x-3)Q_3(x)+ax^2+bx+c \\ &= (x^2+1)(x-3)Q_3(x)+a(x^2+1) \\ &\quad (\because f(x)\text{는 } x^2+1\text{로 나누어 떨어지므로}) \\ &= (x^2+1)\{(x-3)Q_3(x)+a\} \end{aligned}$$

$x=3$을 대입하면 $f(3)=10a=5$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$이고 나머지는 $\frac{1}{2}(x^2+1)$

23. 다음 식 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a+b$ ② $b+c$ ③ $c+a$

④ $b-a$ ⑤ $-b-c$

해설

전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리하면

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$
$$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$$
$$=(b+c)\left\{a^2+(b+c)a+bc\right\}$$
$$=(b+c)(a+b)(a+c)$$

$\therefore$ ④ $b-a$는 인수가 아니다

24. $-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$ 을 인수분해했을 때, 각 인수들의 합이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $a+b$ ② $2a-2b$ ③ $2b-2a$

④ $2b-2c$ ⑤ 0

해설

a에 대한 내림차순으로 정리한다.

$-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$

$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc^2-b^2c$

$=(c-b)a^2-(c-b)(c+b)a+bc(c-b)$

$=(c-b)\left\{a^2-(c+b)a+bc\right\}$

$=(c-b)(a-b)(a-c)\cdots$㉠

$=(a-b)(b-c)(c-a)\cdots$㉡

$=(b-c)(b-a)(a-c)\cdots$㉢

$=(c-a)(b-c)(b-a)\cdots$㉣

㉠식 : 세항을 모두 더하면 $2a-2b$

㉡식 : 세항을 모두 더하면 0

㉢식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2c$

㉣식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2a$

25. $a+b+c=0,\ abc \neq 0$ 일 때, $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=0(\because\ a+b+c=0\ )$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore$(준식) $=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{bc+ca+ab}{abc}\right)$

$=\dfrac{(a+b+c)^2}{3abc}=0$

26. $a-b=2-\sqrt{3}$, $b-c=2+\sqrt{3}$ 인 세 수 a, b, c에 대하여 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$의 값은?

① 4 ② 3 ③ 1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$a-b=2-\sqrt{3}$ ⋯⋯㉠
$b-c=2+\sqrt{3}$ ⋯⋯㉡
㉠+㉡을 계산하면 $a-c=4$
$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=a^2(b-c)+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$
$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+b^2c-c^2b$
$=a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$
$=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\cdot 4=4$

27. x에 관한 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여, $(x+1)f(x)=(x-1)g(x)$일 때, 다음 중 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는?

① $(x-1)g(x)$ ② $(x+1)g(x)$ ③ $(x-1)^2g(x)$

④ $(x+1)^2g(x)$ ⑤ $(x-1)^3g(x)$

해설

$(x+1)f(x)=(x-1)g(x)\cdots$①

$x+1$과 $x-1$이 서로 소이므로

$x+1$은 $g(x)$의 인수이다.

따라서 $g(x)=(x+1)h(x)\cdots$② 로 놓으면

①에서 $f(x)=(x-1)h(x)\cdots$③

②와 ③에서 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는

$(x-1)(x+1)h(x)$ 즉, $(x-1)g(x)$

28. 두 다항식 $f(x)=(x-1)(x+1)(x+2)$, $g(x)=2x^3-(a+2)x^2-ax+2a$의 최대공약수가 이차식이다. 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

해설

$g(1)=0$이므로 $g(x)$는 $x-1$를 인수로 갖는다. 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -(a+2) & -a & 2a \\ & & 2 & -a & -2a \\ \hline & 2 & -a & -2a & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x)=(x-1)(2x^2-ax-2a)$

$f(x)=(x-1)(x+1)(x+2)$이므로

최대공약수는 $(x-1)(x+1)$ 또는 $(x-1)(x+2)$

i) $(x-1)(x+1)$ 일 때

$2(-1)^2-a(-1)-2a=0$에서 $a=2$

$\therefore\ g(x)=2(x-1)(x+1)(x-2)$

ii) $(x-1)(x+2)$ 일 때

$2(-1)^2-a(-2)-2a=0-8\neq 0$

i) , ii) 에서

$g(x)=2(x-1)(x+1)(x-2)$이고 $a=2$

29. x^2 의 계수가 1 인 세 이차식 A, B, C 가 다음 세 조건을 모두 만족할 때, 이차식 A 는?

㉠ A, B 의 최대공약수는 $x+1$ 이다.

㉡ B, C 의 최대공약수는 $x-2$ 이다.

㉢ A, C 의 최소공배수는 x^3+2x^2-5x-6 이다.

① x^2+4x+3 ② x^2-x-2 ③ x^2+x-6

④ x^2+5x+6 ⑤ x^2+2x-3

해설

A, B 의 최대공약수는 $x+1$ 이므로
$A=a(x+1)$, $B=b(x+1)$
B, C 의 최대공약수는 $x-2$ 이므로
$B=(x-2)(x+1)$, $C=c(x-2)$
A, C 의 최소공배수는
$x^3+2x^2-5x-6=(x+3)(x-2)(x+1)$
따라서 A, C 의 최대공약수는 $(x+3)$ 이고
$A=(x+3)(x+1)=x^2+4x+3$

30. 두 다항식 $x^3 - ax^2 - bx + 1$, $x^3 + bx^2 + ax + 1$의 최대공약수가 x에 대한 일차식일 때, 상수 a, b에 대하여 $a - b$의 값은?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

최대공약수를 $(x - \alpha)$라 하자. 인수정리에 의해

$\alpha^3 - a\alpha^2 - b\alpha + 1 = 0 \quad \cdots$ ①

$\alpha^3 + b\alpha^2 + a\alpha + 1 = 0 \quad \cdots$ ②

②–① $= (b + a)\alpha^2 + (a + b)\alpha$

$= (a + b)\alpha(\alpha + 1) \cdots\cdots$ ③

$a + b = 0$이면 두 다항식이 같아지므로 조건에 맞지 않는다

③에서 $\alpha(\alpha + 1) = 0 \quad \therefore \quad \alpha = 0$ 또는 -1

i) $\alpha = 0$ 을 ①에 대입 : $1 = 0 \Rightarrow$ 성립하지 않는다.

ii) $\alpha = -1$ 을 ①에 대입 : $-1 - a + b + 1 = 0$

$\therefore \quad a - b = 0$