1. 연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha$,$y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$\begin{cases} y = x + 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2 + (x+1)^2 = 5$, $2x^2 + 2x - 4 = 0$,

$2(x+2)(x-1) = 0$

$\therefore\ x = 1,\ -2$

$x = 1$일 때, $y = 2$,

$x = -2$일 때, $y = -1$

$\therefore\ \alpha = 1, \beta = 2$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = -1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$

2. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

$(x-y)(x-2y)$

$\Rightarrow \quad (x-y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = y$

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$

ii) $x = 2y$

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$x + y = (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=a,\ y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots$ ㉠
$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3,\ xy=2$
$\therefore \quad ab=2$

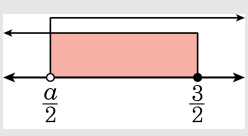
4. 연립부등식 $\begin{cases} x \le \dfrac{3}{2} \\ 2x > a \end{cases}$ 을 만족하는 정수의 개수가 5 개일 때, a 의 값의 범위는?

① $a > -6$ ② $-8 < a \le -6$ ③ $a < -8$

④ $-8 \le a < -6$ ⑤ $-8 \le a \le -6$

해설

x 의 범위가 그림과 같을 때 5 개의 정수해를 갖는다.



$-4 \le \dfrac{a}{2} < -3$ 양변에 2 을 곱하면 $-8 \le a < -6$

5. 연립부등식 $\begin{cases} -x+1<4 \\ 4x+2<-10 \end{cases}$ 의 해는?

① $x<-3$ ② $x=-3$ ③ $x>-3$

④ $-3<x<3$ ⑤ 해가 없다.

해설

(ⅰ) $-x+1<4,\ x>-3$

(ⅱ) $4x+2<-10,\ x<-3$

따라서 해가 없다.

6. 연립부등식 $2x+a<x+2<4(x-1)$ 의 해가 $b<x<5$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -5 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$2x+a<x+2<4(x-1)$

$2x+a<x+2 \rightarrow x<2-a$

$x+2<4(x-1) \rightarrow x>2$

$2<x<2-a$ 가 $b<x<5$ 이므로 $a=-3,\ b=2$

$\therefore\ a+b=-1$

7. 다음 연립부등식이 해를 가질 때, 상수 a 의 값의 범위는?

$$\begin{cases} x-10>a \\ 4x-5\le 3 \end{cases}$$

① $a \ge -8$ ② $a > -8$ ③ $a < -8$

④ $a > -12$ ⑤ $a < -12$

해설

정리하면

$$\begin{cases} x > a+10 \\ x \le 2 \end{cases}$$

해가 존재하기 위해서는 $a+10 < 2$ 이어야 한다.

$\therefore\ a < -8$

8. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

① $x=2\sqrt{5},\ y=-\sqrt{5}$　② $x=-2\sqrt{5},\ y=\sqrt{5}$

③ $x=\frac{5\sqrt{2}}{2},\ y=\frac{5\sqrt{2}}{2}$　④ $x=-\frac{5\sqrt{2}}{2},\ y=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

⑤ $x=-\frac{5\sqrt{2}}{2},\ y=-\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

$x^2+xy-2y^2=0$에서

$(x-y)(x+2y)=0$

i) $x=y$일 때

$x^2+y^2=2y^2=25$

$y=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2},\quad x=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

ii) $x=-2y$일 때

$x^2+y^2=5y^2=25$

$y^2=5,\ y=\pm\sqrt{5},\ x=\mp2\sqrt{5}$ (복호동순)

∴ 구하는 해는$(\frac{5\sqrt{2}}{2},\ \frac{5\sqrt{2}}{2}),\quad (-\frac{5\sqrt{2}}{2},\ -\frac{5\sqrt{2}}{2}),$

$(-2\sqrt{5},\ \sqrt{5}),\ (2\sqrt{5},\ -\sqrt{5})$

9. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

① $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$ ② $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$

④ $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

해설

$x^2 - xy - 2y^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x+y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = -y$ $2x^2 + y^2 = 2y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm\sqrt{3}, \quad x = \mp\sqrt{3}$

ii) $x = 2y$ $2x^2 + y^2 = 8y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm 1, \quad x = \pm 2$

$\therefore$ 해 : $\begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = +-2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

(복부호동순)

10. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2+3t-4=0$ 의 두 근이므로
$(t-1)(t+4)=0$ 에서
$t=1$ 또는 $t=-4$
따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

$\therefore\ 1+(-4)+(-4)+1=-6$

11. x에 대한 두 이차방정식 $x^2-ax+10=0$, $x^2+x+b=0$이 공통근 2를 가질 때, 두 이차방정식의 공통근이 아닌 나머지 두 근의 합은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x^2-ax+10=0$, $x^2+x+b=0$의 공통근이 2이므로 $x=2$를 두 이차방정식에 각각 대입하면 성립한다.

$2^2-2a+10=0$, $2^2+2+b=0$

$\therefore\ a=7,\ b=-6$

이 때, $x^2-7x+10=0$에서

$(x-2)(x-5)=0$이므로 $x=2,\ 5$

또, $x^2+x-6=0$에서

$(x-2)(x+3)=0$이므로 $x=2,\ -3$

따라서 공통근이 아닌 나머지 두 근은

$5,\ -3$이므로 두 근의 합은 2이다.

12. 대각선의 길이가 $\sqrt{34}\,\mathrm{m}$ 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 가로, 세로의 길이를 각각 $2\,\mathrm{m}$ 씩 늘였더니, 넓이가 $20\,\mathrm{m}^2$ 만큼 넓어졌다고 한다. 처음 땅의 가로, 세로의 길이를 구하면?

① 가로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$

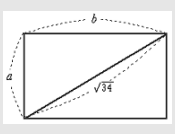
② 가로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$

③ 가로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$ 또는 가로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$

④ 가로의 길이 : $(3\sqrt{6}-2)\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $(3\sqrt{6}-2)\,\mathrm{m}$

⑤ 가로의 길이 : $\sqrt{3}\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $\sqrt{5}\,\mathrm{m}$

해설



$a^2+b^2=(\sqrt{34})^2=34$

$(a+2)(b+2)=ab+20$

$ab+2(a+b)+4=ab+20$

$\therefore\ a+b=8$

$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=64-34=30$

$\therefore\ ab=15\ b=8-a$

$a\cdot(8-a)=15\ \rightarrow\ (a-5)(a-3)=0$

$\therefore\ a=3, b=5$ 또는 $a=5, b=3$

13. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=-x+2a$ 를 ②에 대입하면

$x(-x+2a)=a$

$\therefore -x^2+2ax=a$ 즉 $x^2-2ax+a=0$ 이 한 개의 실근을 가져야 하므로 $D/4=a^2-a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$a=1$

14. 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 근이 유리수가 되는 k의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식D ≥ 0 이어야 한다.

$D=25-8k\geq 0$ 곧, $k\leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k=3,\ 2,\ 1,\ \cdots$ 이고,

이 중 $D\geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k=3$ 이다.

15. 다음 식을 만족하는 자연수의 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는?

$$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$$

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5개 이상

해설

$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$
$(m-4)(n-2)=8$
$8=1\times 8=2\times 4=4\times 2=8\times 1$이므로
$(m,n)=(5,\ 10),\ (6,\ 6),\ (8,\ 4),\ (12,\ 3)$
$\therefore$ 4쌍의 $(m,\ n)$이 존재한다.

16. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a는 -10 이상 -2 이하이다.

② a는 -2 이상 6 이하이다.

③ a는 6 이상이다.

④ a는 0 이하이다.

⑤ a는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β라 하면 (단, $\beta \geq \alpha$)
$\alpha + \beta = a$, $\alpha\beta = a + 2$
이 두 식에서 a를 소거하면
$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2$, $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$
$\alpha - 1, \beta - 1$이 정수이므로
$\therefore\ \alpha = 2,\ \beta = 4$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = 0$
$\therefore\ a = 6,\ -2$

17. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30 개 이고 배점은 80 점 이다. 문항별 배점은 2 점, 3 점, 4 점 의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2 점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

2 점 문항 개수를 x, 3 점 문항을 y,
4 점 문항을 z 라 하자
$2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots$ ㉠
$x + y + z = 30 \quad \cdots$ ㉡
㉠$-4\times$㉡ $\Rightarrow \quad y = 40 - 2x$
㉠$-3\times$㉡ $\Rightarrow \quad z = x - 10$
$\therefore \quad x = 10$ 이면 $z = 0$
$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음
$\therefore \quad x \geq 11$, 최소 11 문항

18. 연립부등식 $\begin{cases} 4x-1<3x+5 \\ 6x+a \le 7x+1 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 정수의 개수가 2개 일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

▶ 답:

▷ 정답: $4 < a \le 5$

해설

$4x-1<3x+5$ 를 풀면 $x<6$ 이고, $6x+a \le 7x+1$ 을 풀면 $a-1 \le x$ 이다.
따라서 $a-1 \le x < 6$ 을 만족하는 정수의 개수가 2개이기 위해서 $3 < a-1 \le 4$, 따라서 $4 < a \le 5$ 이다.

19. 연립부등식 $\begin{cases} \frac{5}{2}x-3<2 \\ 7x+k<8x+1 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x 의 개수가 3 개일 때, 정수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$\begin{cases} \frac{5}{2}x-3<2 \\ 7x+k<8x+1 \end{cases}$ 에서

$\begin{cases} x<2 \\ x>k-1 \end{cases}$

두 식을 동시에 만족하는 정수 x 의 개수가 3 개이려면 다음 그림과 같이 $-2 \le k-1 < -1$ 이어야 한다.

즉, $-1 \le k < 0$ 이므로 정수 k 의 값은 -1 이다.

20. 두 부등식 $2x-3<x+2$, $a<2x$의 공통해가 $3, 4$가 되도록 a 값의 범위를 정하면?

① $4<a\leq 6$　② $a<6$　③ $3\leq a<5$

④ $4\leq a<6$　⑤ $5\leq a<7$

해설

$x<5,\ x>\frac{a}{2}$ 이므로

$\frac{a}{2}<x<5$를 만족하는 정수가 $3,\ 4$가 되기 위해서

$2\leq\frac{a}{2}<3$

$\therefore 4\leq a<6$

21. 연립부등식

$\begin{cases} a+5x<2a \\ 2(x-1)\geq -6 \end{cases}$ 이 해를 갖지 않기 위한 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

$a+5x<2a$

$x<\frac{a}{5}$

$2(x-1)\geq -6$

$2x-2\geq -6$

$\therefore x\geq -2$

연립부등식이 해를 갖지 않으려면

$\frac{a}{5}\leq -2$

$\therefore a\leq -10$

따라서 a 의 최댓값은 -10 이다.

22. 다음 연립부등식의 해가 없을 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

$$\begin{cases} 3x-8<5x+2 \\ 2x-3 \le x+a \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \le -8$

해설

$3x-5x<2+8$

$-2x<10$ 에서

$x>-5$

$2x-x \le a+3$ 에서

$x \le a+3$

$a+3 \le -5$ 이어야 해가 없다.

$\therefore\ a \le -8$

23. 두 부등식 $2(5-2x) \geq x+5$, $2x+1 > x+a$ 의 공통해가 존재하지 않을 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a \geq 2$

해설

$2(5-2x) \geq x+5$, $5 \geq 5x$ $\therefore x \leq 1$

$2x+1 > x+a$ $\therefore x > a-1$

따라서 해가 존재하지 않기 위해서는 $a-1 \geq 1$ 이어야 한다.

$\therefore a \geq 2$

24. 연립방정식 $\begin{cases} x(y+z)=10 \\ y(z+x)=18 \\ z(x+y)=24 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 라 할 때, $\alpha\beta\gamma$ 의 값은?

① ± 2 ② ± 4 ③ ± 8 ④ ± 16 ⑤ ± 32

해설

$\begin{cases} x(y+z)=10 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ y(z+x)=18 & \cdots\cdots \text{㉡} \\ z(x+y)=24 & \cdots\cdots \text{㉢} \end{cases}$

㉠ + ㉡ + ㉢ : $2(xy+yz+zx)=52$

$\therefore\ xy+yz+zx=26$

$\therefore\ xy=2,\ yz=16,\ zx=8 \quad \cdots\cdots$ ㉣

㉣에서 $(xyz)^2=16^2 \quad \therefore\ xyz=\pm 16$

$\therefore\ x=\alpha=\pm 1,\ y=\beta=\pm 2,\ z=\gamma=\pm 8$ (복부호동순)

$\therefore\ \alpha\beta\gamma=\pm 16$

25. 다음 등식을 만족시키는 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b)의 개수는?

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$$

① 0 개

② 1 개

③ 2 개

④ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 1 개씩 있다.

⑤ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 2 개씩 있다.

해설

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$, $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a+b}$, $(a+b)^2=ab$, $a^2+ab+b^2=0$

$\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2=0$ 실수로서 이 등식을 만족하는 경우는

$a=0,\ b=0$뿐이다.

따라서 0 이 아닌 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$ 는 없다.