

1. 다음 등식이 x 에 대한 항등식일 때, $a - b + c$ 의 값을 구하여라.

$$3x^2 + 2x + 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x + 1 &= a(x-1)^2 + b(x-1) + c \\ &= ax^2 - (2a-b)x + (a-b+c) \end{aligned}$$

상수항을 비교해 보면

$$\therefore a - b + c = 1$$

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$1 = a - b + c$$

2. x 에 대한 항등식 $ax^2 - 5x + c = 2x^2 + bx - 1$ 에서 a, b, c 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

▷ 정답: $b = -5$

▷ 정답: $c = -1$

해설

계수비교법에 의하여 동차의 계수가 같아야 한다.

$$\therefore a = 2, b = -5, c = -1$$

3. $(x-2)+3yi=0$ 를 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$x-2=0, 3y=0$$

$$x=2, y=0 \rightarrow x+y=2$$

4. x 에 대한 다항식 $(4x^2 - 3x + 1)^5$ 을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0

② 16

③ 32

④ 64

⑤ 1024

해설

$(4x^2 - 3x + 1)^5$ 을 전개하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $(4x^2 - 3x + 1)^5 = a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + \cdots + a_9x + a_{10}$ 과 같이 된다.

여기서 모든 계수들의 합

$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ 을 구하려면

$x = 1$ 을 대입하면 된다.

즉, $(4 - 3 + 1)^5 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$

모든 계수들의 합은 $2^5 = 32$

5. 등식 $\left(\frac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\frac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right) = a+bi$ 를 만족하는 실수 a, b 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b = 9$

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= \frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)} \\&= \frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2} \\&= \frac{6-7i}{3} = 2 - \frac{7}{3}i \text{ 이므로}\end{aligned}$$

$$2 - \frac{7}{3}i = a + bi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a = 2, b = -\frac{7}{3}$$

$$\therefore a - 3b = 2 - 3 \times \left(-\frac{7}{3}\right) = 2 + 7 = 9$$

6. 상수 a, b 에 대하여 다음 등식이 항상 성립할 때, $2a + b$ 의 값은?

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} = \frac{6(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

① 2

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

등식이 항상 성립하기 위해서는 (분모) $\neq 0$ 이어야 한다.

양변에 공통분모인 $(x-1)(x+3)$ 을 곱하면,

$$a(x+3) + b(x-1) = 6(x+1)$$

$$(a+b)x + (3a-b) = 6x+6$$

$$\therefore a+b=6, 3a-b=6$$

두 식을 연립하여 풀면,

$$a=3, b=6-a=3$$

$$\therefore 2a+b=2 \times 3 + 3 = 9$$

7. 등식 $(x+1)(x-1)(x^3-x^2+x-1) = x^5-x^4+ax-b$ 가 항상 성립하도록 a, b 값을 정할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면, $0 = a - b \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면, $0 = -2 - a - b \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 에서 $a = b = -1$

$\therefore a + b = -2$

8. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 이 성립할 때, $a(b+c)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -30

해설

$$(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

양변에 $x = 2, -2, 1$ 을 각각 대입하면

$$0 = 1 + a + b + c, \quad 0 = -27 + 9a - 3b + c, \quad -9 = c$$

세 식을 연립하여 풀면 $a = 5, b = 3, c = -9$

$$\therefore a(b+c) = 5 \times (3-9) = -30$$

해설

좌변을 전개한 후 조립제법으로 풀어도 좋다.

$$(x-2)(x+2)^2$$

$$= x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$= (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

$$= (x-1)[(x-1)\{(x-1) + a\} + b] + c$$

1	1	2	-4	-8	
		1	3	-1	
1	1	3	-1	-9	← c
		1	4		
1	1	4	3		← b
		1			
	1	5			← a

$$\therefore a(b+c) = 5(3-9) = -30$$

9. x 에 대한 항등식 $\frac{x^2 - 3x - 1}{x - 1} - \frac{x^2 - x - 3}{x + 1} + \frac{2}{x} = \frac{Ax + B}{x(x - 1)(x + 1)}$ 에서 $A - B$ 의 값을 수치대입법을 이용하여 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

분모를 간단히 할 수 있는 숫자를 대입해 보자.

양변에 $x = 2$, $x = -2$ 를 대입해서 정리하면

$x = 2$ 일 때

$$\frac{4 - 6 - 1}{1} - \frac{4 - 2 - 3}{3} + \frac{2}{2} = \frac{2A + B}{2 \times 1 \times 3}$$

$$-3 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{2A + B}{6}$$

$$\therefore 2A + B = -10 \cdots \textcircled{㉠}$$

$x = -2$ 일 때

$$\frac{4 + 6 - 1}{-3} - \frac{4 + 2 - 3}{-1} + \frac{2}{-2} = \frac{-2A + B}{(-2)(-3)(-1)}$$

$$-3 + 3 - 1 = \frac{-2A + B}{-6}$$

$$\therefore -2A + B = 6 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $A = -4$, $B = -2$

$$\therefore A - B = (-4) - (-2) = -2$$

10. $f(x)$ 가 x 의 다항식일 때 $(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 가 x 에 대한 항등식이 될 때 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 에서

$x^2 = 2$ 를 대입하면 $0 = 16 + 4a + b \cdots \textcircled{1}$

$x^4 = -1$ 을 대입하면 $0 = 1 - a + b \cdots \textcircled{2}$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3, b = -4$

$\therefore a + b = -7$

11. $\frac{2x+3a}{4x+2}$ 가 x 에 관계없이 일정한 값을 가질 때, a 의 값을 구하면?
(단, $x \neq -\frac{1}{2}$)

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$\frac{2x+3a}{4x+2} = k \text{ (일정)라 놓으면}$$

$$2x+3a = k(4x+2) \text{ 에서 } (2-4k)x + (3a-2k) = 0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$2-4k=0, 3a-2k=0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } a = \frac{1}{3}$$

12. k 의 값에 관계없이 $(3k^2 + 2k)x - (k + 1)y - (k^2 - 1)z$ 의 값이 항상 1 일 때, $x + y + z$ 의 값은?

① -3

② 0

③ 3

④ 6

⑤ 8

해설

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$k^2(3x - z) + k(2x - y) - (y - z) = 1$$

위 식이 k 의 값에 관계없이 성립하므로 k 에 대한 항등식이다.

$$\begin{cases} 3x - z = 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ 2x - y = 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ z - y = 1 & \sim \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$x = 1, y = 2, z = 3$$

$$\therefore x + y + z = 6$$

13. $(m^2 - 4)x - 1 = m(3x + 1)$ 를 만족하는 x 가 없도록 하는 상수 m 의 값은?

① -1

② -2

③ -4

④ 4

⑤ 5

해설

$(m^2 - 3m - 4)x - 1 - m = 0$ 의 해가 없으므로

$m^2 - 3m - 4 = 0$ 이고 $-m - 1 \neq 0$

$\therefore m = 4$

14. $\frac{2x + ay - b}{x - y - 1}$ 가 $x - y - 1 \neq 0$ 인 어떤 x, y 의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\frac{2x + ay - b}{x - y - 1} = k \text{라 놓으면}$$

$$2x + ay - b = k(x - y - 1)$$

x, y 에 대하여 정리하면,

$$(2 - k)x + (a + k)y - b + k = 0$$

위의 식이 x, y 에 대한 항등식이어야 하므로

$$2 - k = 0, a + k = 0, -b + k = 0$$

$$\therefore k = 2, a = -2, b = 2$$

$$\therefore a - b = -4$$

15. $x-y=1$ 을 만족하는 임의의 실수 x, y 에 대하여 $ax^2+bxy+cy^2-1=0$ 이 항상 성립할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$y = x - 1$ 을 준식에 대입하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $(a+b+c)x^2 - (b+2c)x + c - 1 = 0$

x 에 대한 항등식이므로

$$a+b+c=0, b+2c=0, c-1=0$$

$$\therefore a=1, b=-2, c=1$$

$$\therefore a+b+c=0$$

16. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $(a, b, c) = ab + bc$ 로 정의한다. 이때, 등식 $(x, a, y) - (2x, b, y) = (x, 2, y)$ 이 임의의 실수 x, y 에 대하여 성립하도록 a, b 의 값을 정하면?

① $a = 1, b = 2$

② $a = 2, b = 2$

③ $a = 2, b = 0$

④ $a = 0, b = 2$

⑤ $a = 0, b = 0$

해설

기호의 정의에 따라서 주어진 식을 다시 쓰면

$$(ax + ay) - (2bx + by) = 2x + 2y$$

이 식을 x, y 에 대하여 정리하면

$$(a - 2b - 2)x + (a - b - 2)y = 0$$

이 등식이 임의의 x, y 에 대하여 성립하므로

$$a - 2b - 2 = 0, a - b - 2 = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 0$

17. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 을 $(x-1)^2$ 을 나누었을 때 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로

$$x^3 + ax^2 + bx + 3$$

$$= (x-1)^2(x+k) + 2x + 1$$

$$= x^3 + (k-2)x^2 + (3-2k)x + k + 1$$

양변의 계수를 비교하면

$$a = k - 2, \quad b = 3 - 2k, \quad 3 = k + 1$$

$$k = 2 \text{ 이므로 } a = 0, \quad b = -1$$

$$\therefore a - b = 0 - (-1) = 1$$

18. x 의 다항식 $x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때, 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때,
몫을 $x + q$ 라 하면 (일반적으로 $px + q$ 로 해야겠지만 x^3 의 계수가 1이므로 $x + q$)

$$x^3 + ax + b = (x^2 - 3x + 2)(x + q) + 2x + 1$$

$$\therefore x^3 + ax + b = (x - 2)(x - 1)(x + q) + 2x + 1$$

이 등식은 x 에 관한 항등식이므로

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 + a + b = 2 + 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 8 + 2a + b = 4 + 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a = -5, b = 7$$

$$\therefore a + b = 2$$

19. 다항식 $4x^3 - 2x^2 - 21x + \frac{45}{2}$ 가 $(x-r)^2$ 으로 나누어 떨어질 때, 양수 r 의 값은?

① 1.2

② 1.5

③ 1.8

④ 2.1

⑤ 2.4

해설

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 21x + \frac{45}{2} \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-r)^2(4x-\alpha) \\ &= (x^2 - 2rx + r^2)(4x - \alpha) \\ &= 4x^3 - (\alpha + 8r)x^2 + (4r^2 + 2r\alpha)x - r^2\alpha \end{aligned}$$

①과 계수비교를 하면

$$\alpha + 8r = 2 \cdots \textcircled{2}, \quad 4r^2 + 2r\alpha = -21 \cdots \textcircled{3}$$

②에서 $\alpha = 2 - 8r$,

③에 대입하면

$$4r^2 + 2r(2 - 8r) = -21$$

$$12r^2 - 4r - 21 = 0, \quad (2r - 3)(6r + 7) = 0$$

$$\therefore r = \frac{3}{2} \quad (\because r > 0)$$

20. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 이 $x^2 + 1$ 로 나누어떨어질 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x^3 + ax^2 + bx + 3 = (x^2 + 1)(x + k)$ 라 할 수 있다.

여기에서 상수항을 비교하면 $k = 3$

$$x^3 + ax^2 + bx + 3 = (x^2 + 1)(x + 3)$$

$$= x^3 + 3x^2 + x + 3$$

$$\therefore a = 3, b = 1 \text{ 이므로 } a + b = 4$$

해설

$$x^3 + ax^2 + bx + 3 = (x^2 + 1)Q(x)$$

$x^2 = -1$ 을 대입하면

$$-x - a + bx + 3 = 0, (b - 1)x + (3 - a) = 0$$

x 에 대한 항등식이므로

$$a = 3, b = 1$$

$$\therefore a + b = 4$$

21. x 에 대한 다항식 $(ax - 1)^3$ 의 전개식에서 모든 항의 계수의 합이 125일 때, 실수 a 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$x = 1$ 을 대입하면 계수들의 합을 얻을 수 있다.

$$\text{즉, } (a - 1)^3 = 125, a - 1 = 5$$

$$\therefore a = 6$$

22. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $2x^3 - 3x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 성립할 때, $a+b+c+d$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수)

① -3

② -1

③ 0

④ 3

⑤ 5

해설

계수의 합 $a+b+c+d$ 를 구할 때는 우변의 문자부분을 모두 1 이 되게 하는 x 값을 양변에 대입하면 간단하게 그 값을 구할 수 있다.

이 문제에서는 $x=2$ 를 양변에 대입하면

$$16 - 12 - 2 + 1 = a + b + c + d$$

$$\therefore a + b + c + d = 3$$

해설

a, b, c, d 의 값을 각각 구하기 위해서는 아래와 같이 조립제법을 사용할 수 있다.

$$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$$

$$= (x-1)[(x-1)\{a(x-1) + b\} + c] + d$$

즉, $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

1	2	-3	-1	1	
		2	-1	-2	
1	2	-1	-2	-1	← d
		2	1		
1	2	1	-1		← c
		2			
	2	3			← b
	↑				
	a				

$$\therefore a + b + c + d = 3$$

23. 등식 $(x^2 - 3x + 1) + (y^2 - 1)i = -1 + 3i$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 최댓값은?

① -4

② -2

③ -1

④ 2

⑤ 4

해설

실수부와 허수부로 나누어 생각한다.

$$\therefore x^2 - 3x + 1 = -1 \quad y^2 - 1 = 3$$

$$x = 1 \text{ 또는 } 2 \quad y = \pm 2$$

$$\therefore (xy \text{의 최댓값}) = 4$$

24. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{x+i}{x-i}$ 를 만족하는 실수 x 의 값은 ?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ -5

해설

$$(1 + \sqrt{3}i)(x - i) = 2(x + i)$$

$$(x + \sqrt{3}) + (\sqrt{3}x - 1)i = 2x + 2i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x + \sqrt{3} = 2x, \quad \sqrt{3}x - 1 = 2$$

$$\therefore x = \sqrt{3}$$

25. 다음 등식이 x 에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c, d 에 대하여 $a+b+c+d$ 의 값을 구하면? (단, $a < c$)

$$(x-a)^2(bx-x^2-1) = (x-c)^2(dx-x^2-1)$$

① -4

② 4

③ 5

④ -5

⑤ 0

해설

$a < c$ 에서 $a \neq c$ 이므로 주어진 등식에서

$$x^2 - bx + 1 = (x - c)^2 \quad \therefore b = 2c, 1 = c^2$$

$$x^2 - dx + 1 = (x - a)^2 \quad \therefore d = 2a, 1 = a^2$$

$$\therefore a = -1, b = 2, c = 1, d = -2$$

$$\therefore a + b + c + d = 0$$

26. 1985년부터 1995년까지 5년 간격으로 조사한 우리나라의 농가인구 비율 P 는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

연도	85	90	95
인구비율(%)	20.9	15.5	10.8
인구(1000명)	8521	6661	4851

$$P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$$

이 때, $t = 0$ 은 1985년을 나타낸다. 이 식을 $t = 0$ 이 1990년을 나타내도록 변형하면?

- ① $P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$
- ② $P = 0.35(t + 1)^2 - 5.75(t + 1) + 20.9$
- ③ $P = 0.35(t - 1)^2 - 5.75(t - 1) + 20.9$
- ④ $P = 0.35(t + 2)^2 - 5.75(t + 2) + 20.9$
- ⑤ $P = 0.35(t - 2)^2 - 5.75(t - 2) + 20.9$

해설

$P_1(t) = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$ 일 때,

$t = 0 \rightarrow 1985$ 년, $t = 1 \rightarrow 1990$ 년, $t = 2 \rightarrow 1995$ 년

$P_2(t) = 0.35(t + 1)^2 - 5.75(t + 1) + 20.9$ 이면,

$P_2(0) = P_1(1)$ 이므로 $P_2(t)$ 에서

$t = 0 \rightarrow 1990$ 년임을 알 수 있다.

27. $y = kx^2 + (1 - 2k)x + k - 1$ 의 그래프는 k 에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 B(b, 1)라 할 때, $\overline{AB}$ 의 길이가 $\sqrt{2}$ 가 되도록 하는 b 의 값들의 합을 구하면?

① 1

② 2

③ -2

④ -3

⑤ -1

해설

(i) 준식을 k 에 관하여 정리하면

$$(x^2 - 2x + 1)k + (x - y - 1) = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 성립할 조건은

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \quad x - y - 1 = 0$$

$$\therefore x = 1, y = 0$$

$$\therefore A(1, 0)$$

(ii) A(1, 0), B(b, 1)에서

$$\overline{AB} = \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(b-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

$$b^2 - 2b = 0, \quad b(b-2) = 0 \quad \therefore b = 0, 2$$

$\therefore b$ 의 값들의 합은 2

28. $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 을 동시에 만족시키는 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 이 성립할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 11

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 4

해설

(i) $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 에서

x, y 를 z 에 대하여 나타내면

$$x = 2z + 1, y = -3z - 1$$

(ii) $x = 2z + 1$, $y = -3z - 1$ 을 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 에 대입하여 정리하면

$$(4a + 9b + c)z^2 + 2(2a + 3b)z + (a + b - 1) = 0$$

$$\therefore 4a + 9b + c = 0, 2a + 3b = 0, a + b - 1 = 0$$

$$\therefore a = 3, b = -2, c = 6$$

$$\therefore a + b + c = 7$$

29. $(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때,
 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2^{24}

④ 2^{25}

⑤ 2^{50}

해설

$$(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$$

$x = 1$ 을 양변에 대입하면

$$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots \textcircled{1}$$

$x = -1$ 을 양변에 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$$

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50} = 0$$

30. 등식 $(1 + 2x - x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20}$ 의 값은?

① -2^{10}

② -2^9

③ 0

④ 2^9

⑤ 2^{10}

해설

$$(1 + 2x - x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20} \cdots \textcircled{㉠}$$

㉠은 x 에 대한 항등식이므로 x 에 어떤 실수 값을 대입해도 항상 성립한다.

㉠의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$(-2)^{10} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{㉢}$$

㉡ + ㉢을 하면

$$2^{10} + (-2)^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$$

$$2 \times 2^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20} = 2^{10}$$

31. 유리수 a, b, c, d 에 대하여 $(\sqrt{2} + i)^4 + a(\sqrt{2} + i)^3 + b(\sqrt{2} + i)^2 + c(\sqrt{2} + i) + d = 0$ 을 만족한다. 이 때, $a - b - c - d$ 의 값은? (단, $i^2 = -1$)

① -7

② 3

③ 1

④ -1

해설

$$(\sqrt{2} + i)^4 = -7 + 4\sqrt{2}i, (\sqrt{2} + i)^3 = -\sqrt{2} + 5i,$$

$$(\sqrt{2} + i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i$$

$$(-7 + 4\sqrt{2}i) + a(-\sqrt{2} + 5i)$$

$$+ b(1 + 2\sqrt{2}i) + c(\sqrt{2} + i) + d = 0$$

$$(-7 - \sqrt{2}a + b + \sqrt{2}c + d)$$

$$+ (4\sqrt{2} + 5a + 2\sqrt{2}b + c)i = 0$$

$$\therefore (-7 + b + d) + (c - a)\sqrt{2} = 0,$$

$$(5a + c) + (4 + 2b)\sqrt{2} = 0$$

a, b, c, d 는 유리수이므로 $-7 + b + d = 0$:

$$c - a = 0, 5a + c = 0, 4 + 2b = 0$$

$$\therefore a = 0, b = -2, c = 0, d = 9$$

$$\therefore a - b - c - d = -7$$

32. 자연수 n 에 대하여 다항식 $f(x) = x^n(x^2 + ax + b)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2^n(x-2)$ 일 때, $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나눈 나머지는?

① $2 \cdot 3^n$

② 3^n

③ 3^{n+1}

④ $4 \cdot 3^n$

⑤ 3^2n

해설

$$x^n(x^2 + ax + b) = (x-2)^2 Q(x) + 2^n(x-2)$$

$$x^n(x^2 + ax + b) = x^n(x-2)(x+\alpha) \text{ 이라 하면}$$

$$x^n(x-2)(x+\alpha)$$

$$= (x-2) \{ (x-2)Q(x) + 2^n \}$$

$$\therefore x^n(x+\alpha) = (x-2)Q(x) + 2^n$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$2^n(2+\alpha) = 2^n$$

$$2+\alpha = 1$$

$$\therefore \alpha = -1$$

$$x^2 + ax + b = (x-1)(x-2)$$

$$\therefore a = -3, b = 2$$

$$f(x) = x^n(x^2 - 3x + 2) \text{ 이므로}$$

$$f(3) = 3^n(9 - 9 + 2)$$

$$= 2 \times 3^n$$

33. x 에 대한 다항식 $x^{10}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2^{10}(x-2)$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $3b - 2a$ 의 값은?

① 3

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$x^{10}(x^2 + ax + b) = (x-2)^2 Q(x) + 2^{10}(x-2)$$

$$x^{10}(x^2 + ax + b) = (x-2) \{ (x-2) Q(x) + 2^{10} \} \text{이므로}$$

$$x^2 + ax + b = (x-2)(x-\alpha) \text{라 할 수 있다.}$$

$$x^{10}(x-2)(x-\alpha) = (x-2) \{ (x-2) Q(x) + 2^{10} \}$$

$$\therefore x^{10}(x-\alpha) = (x-2) Q(x) + 2^{10}$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$2^{10}(2-\alpha) = 2^{10} \therefore \alpha = 1$$

$$\therefore x^2 + ax + b = (x-2)(x-1)$$

$$= x^2 - 3x + 2$$

$$a = -3, b = 2$$

$$\therefore 3b - 2a = 12$$