

1. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 6$, $abc = -1$ 일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?

①

11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$ab + bc + ca = -1$$

$$a^3 + b^3 + c^3$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$

$$= 2 \times (6 - (-1)) - 3 = 11$$

2. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + y)(y + z)(z + x)$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x + y + z = 1 \text{ 에서}$$

$$x + y = 1 - z$$

$$y + z = 1 - x$$

$$z + x = 1 - y$$

$$(x + y)(y + z)(z + x) = (1 - z)(1 - x)(1 - y)$$

$$= 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz$$

$$= 1 - 1 + 2 - 3 = -1$$

3. 등식 $(1+x+x^2)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은?

① 28

② 26

③ 15

④ 14

⑤ 13

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$3^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_8 - \textcircled{\text{㉠}}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$1^3 = a_0 - a_1 + a_2 + \dots + a_8 - \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}} - \textcircled{\text{㉡}} : 26 = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 13$$

4. 등식 $x^3 + x - 1 = (x - a)(x - b)(x - c)$ 가 항등식일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하면?

① 2

② 5

③ 3

④ 7

⑤ -7

해설

$$x^3 + x - 1$$

$$= (x - a)(x - b)(x - c)$$

$$= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

$$\therefore a + b + c = 0, ab + bc + ca = 1, abc = 1$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3$$

5. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 2이고, $x+2$ 로 나눈 나머지가 5이다. 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)(x+2)$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(2)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

나머지 정리에 의하여,

$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$ 라 할 수 있다.

$$f(1) = a + b = 2$$

$$f(-2) = -2a + b = 5$$

연립하면, $a = -1$ $b = 3$

$$\therefore R(x) = -x + 3$$

$$R(2) = 1$$

6. 다항식 $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2x+1$ 이고, $(x-2)^3$ 으로 나눈 나머지가 $x^2 - x + 6$ 이다. $f(x)$ 를 $(x+1)(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$

② $3x-2$

③ $3x+2$

④ $x^2 - 2x + 1$

⑤ $x^2 - x + 6$

해설

$$f(x) = (x+1)^2 A(x) + 2x+1 \text{ 에서 } f(-1) = -1$$

$$f(x) = (x-2)^3 B(x) + x^2 - x + 6$$

$$= (x-2)^3 B(x) + (x-2)^2 + 3x+2$$

$$= (x-2)^2 \{(x-2)B(x) + 1\} + 3x+2$$

즉 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 $ax^2 + bx + c$ 라 하면

$$f(x) = (x+1)(x-2)^2 Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x+1)(x-2)^2 Q(x) + a(x-2)^2 + 3x+2$$

$$f(-1) = 9a - 1 = -1 \quad \therefore a = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 + 3x+2$$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $3x+2$

7. 서로 다른 세 실수 x, y, z 에 대하여 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ 를 만족할 때, $x + y + z$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

$$(x + y + z) = 0 \text{ 또는 } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$$

$$\therefore x + y + z = 0 \text{ 또는 } \frac{1}{2}\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} = 0$$

그런데 x, y, z 가 서로 다른 세 실수($x \neq y \neq z$)이므로

$$x + y + z = 0$$

8. $x = \frac{1 - \sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $3x^2 - 2x$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-i$

② -1

③ 0

④ 1

⑤ i

해설

$x = \frac{1 - \sqrt{2}i}{3}$, $3x - 1 = -\sqrt{2}i$ 의 양변을 제곱하면

$$9x^2 - 6x + 1 = -2, \quad 9x^2 - 6x = -3$$

양변을 3으로 나누면

$$\therefore 3x^2 - 2x = -1$$

9. 복소수 $\alpha = 2 - i$, $\beta = -1 + 2i$ 일 때, $\alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\beta}$ 의 값은?
(단, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ 는 각각 α , β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1

② 2

③ 4

④ 10

⑤ 20

해설

$$\begin{aligned} & \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\beta} \\ &= \bar{\alpha}(\alpha + \beta) + \bar{\beta}(\alpha + \beta) \\ &= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \\ &= (\alpha + \beta)\overline{(\alpha + \beta)} \\ &= (1 + i)(1 - i) \\ &= 2 \end{aligned}$$

10. 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}$ 의 값을 구하면?

- ① 2 ② $\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{22}{25}$ ④ $\frac{22}{5}$ ⑤ -2

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = 5$$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} &= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^2} \\ &= \frac{8 - 15 \times 2}{25} = -\frac{22}{25}\end{aligned}$$

11. x 의 범위가 $-2 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $f(x) = x^2 + 2x + C$ 의 최소값이 4가 되도록 상수 C 의 값을 정할 때, 함수 $f(x)$ 의 최대값은?

① 8

② 12

③ 16

④ 20

⑤ 24

해설

$$f(x) = (x+1)^2 + C - 1$$

주어진 범위에서 $x = -1$ 일 때

최소값을 가지므로

$$f(-1) = C - 1 = 4 \Rightarrow C = 5$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+1)^2 + 4$$

주어진 범위에서 $x = 3$ 일 때 최대값을 가진다.

$$\Rightarrow f(3) = 4^2 + 4 = 20$$

12. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ 5x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$ 의 근을 $x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때,

$\alpha + \beta$ 의 최댓값은?

① 4

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ 5x^2 - y^2 = 4 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①식을 인수분해하면

$$(2x - y)(x - y) = 0 \quad \therefore y = 2x, y = x$$

②식에 대입하면

$$y = 2x \text{ 일 때 } 5x^2 - (2x)^2 = 4, x^2 = 4, x = \pm 2, y = \pm 4$$

$$y = x \text{ 일 때 } 5x^2 - x^2 = 4, 4x^2 = 4, x^2 = 1, x = \pm 1, y = \pm 1$$

$$\therefore \alpha + \beta = 6, -6, 2, -2$$

$$\therefore \alpha + \beta \text{의 최댓값은 } 6$$

13. 연립부등식 $\begin{cases} x + a \geq 3 + 2x \\ 3(x - 1) \geq 2x - 5 \end{cases}$ 를 만족하는 정수 x 의 개수가 5개 일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

- ① $5 \leq a < 6$ ② $5 < a \leq 6$ ③ $5 \leq a \leq 6$
④ $6 \leq a < 7$ ⑤ $6 < a \leq 7$

해설

1. $x + a \geq 3 + 2x$

$x \leq a - 3$

2. $3(x - 1) \geq 2x - 5$

$x \geq -2$

$\therefore -2 \leq x \leq a - 3$ 만족하는 정수 x 의 개수가 5 개이므로

$2 \leq a - 3 < 3$

$\therefore 5 \leq a < 6$

14. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 2일 때, 방정식 $f(2x-3) = 0$ 의 두 근의 합은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = 2$

$f(2x-3) = 0$ 에서 $2x-3 = \alpha, 2x-3 = \beta$

$$\therefore x = \frac{\alpha+3}{2}, \frac{\beta+3}{2}$$

$$\therefore \text{두 근의 합은 } \frac{(\alpha+\beta)+6}{2} = 4$$

15. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4kx + 2k + 6 > 0$ 이 항상 성립할 때, k 값의 범위는?

① 모든 실수

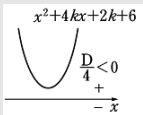
② $-1 < k < \frac{3}{2}$

③ $-\frac{3}{2} < k < 1$

④ 해는 없다

⑤ $k < -1, k > \frac{3}{2}$

해설



$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 1 \cdot (2k + 6) < 0$$

$$4k^2 - 2k - 6 < 0$$

$$(2k - 3)(k + 1) > 0$$

$$\therefore -1 < k < \frac{3}{2}$$

16. 두 점 A(3, 4), B(5, 2)로부터 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표는?

① (-3, 2)

② (0, 0)

③ (3, 1)

④ (1, 0)

⑤ (-2, 3)

해설

점 P의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-3)^2 + (-4)^2 = (a-5)^2 + (-2)^2$$

$$a^2 - 6a + 25 = a^2 - 10a + 29$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore P(1, 0)$$

17. 두 점 $A(-2, 1)$, $B(4, -3)$ 에서 같은 거리에 있고 직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점 P 의 좌표는?

- ① $(-3, -7)$ ② $(-2, -5)$ ③ $(3, 5)$
④ $(2, 3)$ ⑤ $(2, 5)$

해설

점 P 의 좌표를 (a, b) 라 하면 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서

$$(a + 2)^2 + (b - 1)^2 = (a - 4)^2 + (b + 3)^2$$

정리하면 $12a - 8b = 20$

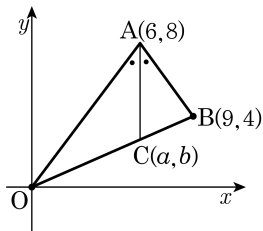
$$\therefore 3a - 2b = 5 \cdots \textcircled{1}$$

또, P 는 $y = 2x - 1$ 위에 있으므로

$$b = 2a - 1 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3$, $b = -7$

18. 다음 그림과 같이 세 점 $O(0, 0)$, $A(6, 8)$, $B(9, 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle AOB$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 OB 와 만나는 점을 $C(a, b)$ 라 할 때, ab 의 값은?



- ① 12 ② 14 ③ 15
 ④ 16 ⑤ 18

해설

$\angle OAC = \angle BAC$ 이므로 $\overline{AO} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{CB}$ 가 성립한다.

이때, $\overline{AO} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\overline{AB} = \sqrt{(9-6)^2 + (4-8)^2} = 5$ 이므로

점 C 는 $\overline{OB}$ 를 $10 : 5$,

즉 $2 : 1$ 로 내분하는 점이다.

따라서 점 C 의 좌표는

$$C\left(\frac{2 \times 9 + 1 \times 0}{2 + 1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 0}{2 + 1}\right)$$

$$\therefore C\left(6, \frac{8}{3}\right) \quad \therefore ab = 6 \cdot \frac{8}{3} = 16$$

19. 두 점 A(1, 2), B(-3, 0)로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취의 방정식은?

① $y = 2x + 1$

② $y = 2x - 1$

③ $y = -2x + 1$

④ $y = -2x - 1$

⑤ $y = -x + 2$

해설

구하는 점을 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

양변을 제곱해서 정리하면

$$-8x - 4y - 4 = 0, -4y = 8x + 4$$

$$\therefore y = -2x - 1$$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 선분의 수직이등분선이다.

$\overline{AB}$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기는 -2 이고

$\overline{AB}$ 의 중점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

$$\therefore y - 1 = -2(x + 1)$$

$$\therefore y = -2x - 1$$

20. 직선 $3x + ay = 3a$ ($a > 0$) 의 그래프가 x 축, y 축과 만나서 이루어진 삼각형의 넓이가 3 일 때, a 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

주어진 식의 양변을 $3a$ 로 나누면 $\frac{x}{a} + \frac{y}{3} = 1$

$\therefore x$ 절편이 a , y 절편이 3 이므로

$$S = \frac{1}{2} \times a \times 3 = 3$$

$\therefore a = 2$

21. 직선 $mx - y + 2m - 1 = 0$ 이 두 점 A(1, 2)와 B(4, 3)을 이은 선분 AB와 만나도록 상수 m 값을 정할 때, m 의 최댓값과 최솟값을 구하면?

① 최댓값 : 2, 최솟값 : $\frac{2}{3}$

② 최댓값 : $\frac{3}{2}$, 최솟값 : $\frac{1}{3}$

③ 최댓값 : $\frac{3}{2}$, 최솟값 : $\frac{2}{3}$

④ 최댓값 : 1, 최솟값 : $\frac{1}{3}$

⑤ 최댓값 : 1, 최솟값 : $\frac{2}{3}$

해설

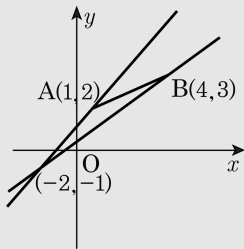
$mx - y + 2m - 1 = 0$ 에서
 $(x + 2)m - y - 1 = 0$ 이므로
 이 직선은 m 의 값에 관계없이
 항상 점 $(-2, -1)$ 을 지난다.

따라서 그림과 같이 직선
 $mx - y + 2m - 1 = 0$ 의 기울기는
 점 A를 지날 때 최대이고 점 B를 지날
 때 최소가 된다.

$$m \times 1 - 2 + 2m - 1 = 0, m = 1$$

$$m \times 4 - 3 + 2m - 1 = 0, m = \frac{2}{3}$$

따라서 최댓값 : 1, 최솟값 : $\frac{2}{3}$



22. 두 직선 $3x - 2y + 1 = 0$, $3x - 2y - 4 = 0$ 사이의 거리를 구하면?

① $\frac{\sqrt{13}}{13}$
④ $\frac{6\sqrt{13}}{5}$

② $\frac{3\sqrt{13}}{13}$
⑤ $\frac{7\sqrt{13}}{5}$

③ $\frac{5\sqrt{13}}{13}$

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점에서 나머지 직선까지의 거리를 구하면 된다.

ex) $3x - 2y + 1 = 0$ 의 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\left| -2 \times \frac{1}{2} - 4 \right|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}$$

23. 좌표평면 위의 원점에서 직선 $3x - y + 2 - k(x + y) = 0$ 까지의 거리의 최대값은?(단, k 는 실수)

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{\sqrt{2}}{4}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⑤ $\sqrt{2}$

해설

원점 O 에서 직선 $(3 - k)x - (1 + k)y + 2 = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{(3-k)^2 + (1+k)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2k^2 - 4k + 10}}$$

거리가 최대가 되려면 분모가 최소일 때이다.

$$2k^2 - 4k + 10 = 2(k - 1)^2 + 8 \geq 8 \text{ 이므로}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2k^2 - 4k + 10}} \leq \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \text{최대값 } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

24. 점 $(a, 2)$ 에서 직선 $12x - 5y - 4 = 0$ 에 이르는 거리가 2 가 되도록 하는 실수 a 의 값들의 합은?

① $-\frac{1}{3}$

② 0

③ 1

④ $\frac{5}{3}$

⑤ $\frac{7}{3}$

해설

점 $(a, 2)$ 에서 직선 $12x - 5y - 4 = 0$ 에
이르는 거리가 2 이므로

$$2 = \frac{|12a - 5 \times 2 - 4|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|12a - 14|}{13}$$

$$\therefore |12a - 14| = 26 \text{ 즉, } 12a - 14 = 26$$

$$\text{또는 } 12a - 14 = -26 \therefore a = \frac{10}{3}$$

또는 $a = -1$ 따라서 실수 a 의 값의 합은

$$\frac{10}{3} + (-1) = \frac{7}{3}$$

25. 세 점 A(-1, 0), B(2, -3), C(5, 3)에 대하여 등식 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax + y + b = 0$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
주어진 조건에서,

$$(x+1)^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y+3)^2 = 2\{(x-5)^2 + (y-3)^2\}$$

$$2x^2 - 2x + 2y^2 + 6y + 14$$

$$= 2(x^2 - 10x + y^2 - 6y + 34)$$

$$18x + 18y - 54 = 0$$

$$\Rightarrow x + y - 3 = 0$$

$$\therefore a + b = 1 + (-3) = -2$$