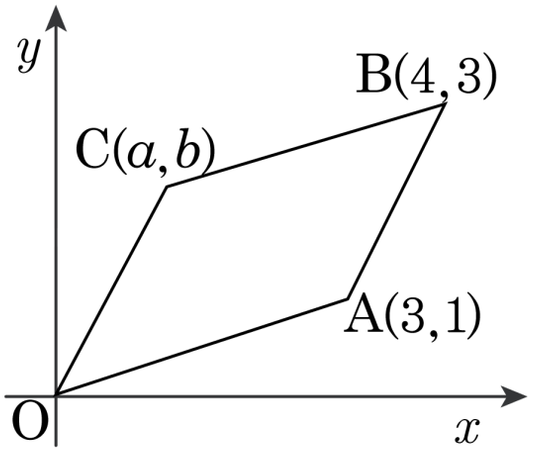
1. 다음 그림과 같이 네 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$, $\mathrm{B}(4,\ 3)$, $\mathrm{C}(a,\ b)$, $\mathrm{O}(0,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC에서 $a+b$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선의 중점은 일치하므로

$$\left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

$\frac{a+3}{2} = 2$에서 $a = 1$

$\frac{b+1}{2} = \frac{3}{2}$에서 $b = 2$

$\therefore a+b = 3$

2. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

3. 평행이동 $f : (x, y) \to (x+a,\ x+b)$ 에 의해 점 $(1, 2)$ 가 점 $(-1, 4)$ 으로 옮겨질 때, 평행이동 f 에 의해 원점으로 옮겨지는 점의 좌표는?

① $(2, -2)$ ② $(2, 2)$ ③ $(2, 0)$

④ $(-2, 2)$ ⑤ $(4, 2)$

해설

$(1 + a, 2 + b) = (-1, 4)$

$\Rightarrow \quad a = -2, \quad b = 2$

$\therefore \quad (x + 2, y + 2) = (0, 0)$

$\Rightarrow \quad x = 2, \quad y = -2$

$\Rightarrow \quad (2, -2)$

4. 집합 $A = \{0, 1\}$ 일 때, 집합 $X = \{(2x+1)y \mid x \in A, y \in A\}$ 의 원소 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x = 0, y = 0$ 일 때, $(2x+1)y = 0$
$x = 0, y = 1$ 일 때, $(2x+1)y = 1$
$x = 1, y = 0$ 일 때, $(2x+1)y = 0$
$x = 1, y = 1$ 일 때, $(2x+1)y = 3$
따라서 가장 큰 수는 3 이다.

5. 3 보다 크고 11 보다 작은 홀수의 집합을 A 라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $3 \in A$ ② $4 \notin A$ ③ $6 \in A$

④ $9 \notin A$ ⑤ $11 \notin A$

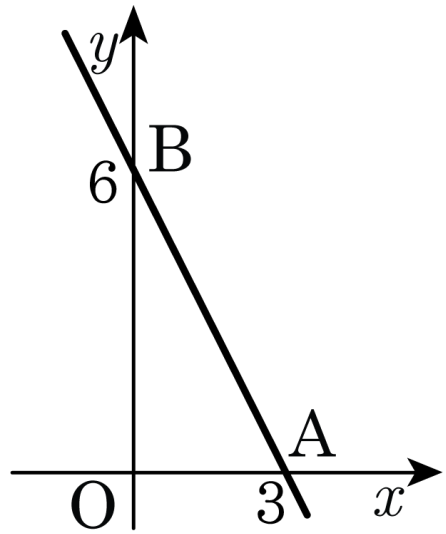
해설

① $3 \notin A$

③ $6 \notin A$

④ $9 \in A$

6. x축, y축 및 직선 $y = -2x + 6$으로 둘러싸인 $\triangle OAB$의 넓이를 3등분하고, 원점을 지나는 두 직선의 방정식은 $y = ax$와 $y = bx$이다. 이 때, $a + b$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

원점을 지나며 $\triangle OAB$의 넓이를 3등분하는 직선은
$\overline{AB}$를 $1 : 2$로 내분하는 점과
$2 : 1$로 내분하는 점 $(2,\ 2)$와 $(1,\ 4)$를 각각 지난다.
두 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y = x$이고,
두 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은 $y = 4x$이다.
그러므로 $a + b = 1 + 4 = 5$

7. 두 점 A(1, 3), B(4, 0) 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\frac{0-3}{4-1} = -1$ 이므로

직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.

또, 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times 4 - 2\times 1}{1-2}, \frac{1\times 0 - 2\times 3}{1-2}\right)$, 즉 $(-2, 6)$

따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고

점 $(-2, 6)$ 을 지나므로

$y - 6 = 1 \cdot (x + 2)$, $y = x + 8$

$a = 1$, $b = 8$ $\therefore a + b = 9$

8. 두 직선 $y = 3x + 2,\ x - ay - 7 = 0$ 이 서로 수직이 되도록 상수 a 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

두 직선이 서로 수직이면 기울기의 곱이 -1 이다.

$\therefore\ 3 \times \frac{1}{a} = -1 \ \Rightarrow\ a = -3$

9. 다음에서 밑줄 친 (㉠), (㉡)의 의미를 바르게 나타낸 것은?

> 정수 a, b, c, d, 에 대하여 집합 X, Y를 $X = \{x|x = 2a + 3b\}$, $Y = \{y|y = 4c + 5d\}$ 라 할 때, $x \in X$ 이면 $x \in Y$ 이고,(㉠) $x \notin X$ 이면 $x \notin Y$이다.(㉡)

① (㉠) $X \subset Y$, (㉡) $X \subset Y$

② (㉠) $X \subset Y$, (㉡) $Y \subset X$

③ (㉠) $Y \subset X$, (㉡) $Y \subset X$

④ (㉠) $Y \subset X$, (㉡) $X \cap Y = \phi$

⑤ (㉠) $X \subset Y$, (㉡) $X \cap Y = \phi$

해설

(㉠) $X \subset Y$ (㉡) $X^c \subset Y^c \leftrightarrow Y \subset X$

10. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 $A = \{x \mid x$는 4의 약수$\}$, $B = \{x \mid x$는 6의 약수$\}$ 일 때, $(A - B)^c$ 은?

① $\{1, 2\}$ ② $\{1, 2, 3\}$ ③ $\{1, 2, 5\}$

④ $\{1, 2, 3, 5\}$ ⑤ $\{1, 2, 3, 5, 6\}$

해설

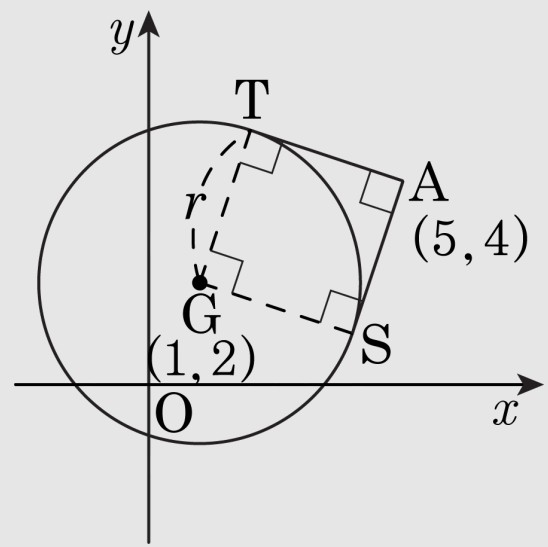
$A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로 $A - B = \{4\}$ 이다.
따라서 $(A - B)^c = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ 이다.

11. 좌표평면 위에 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$ 과 원 밖의 점 $\mathrm{A}(5,\ 4)$가 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{12}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

해설

A 에서 그은 접선이 서로 수직이면 원의 중심 G, 접점 S, T, 점 A 로 이루어지는 사각형 GSAT 는 한 변의 길이가 r 인 정사각형이다.



$$\therefore\ r=\frac{\overline{\mathrm{GA}}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{10}$$

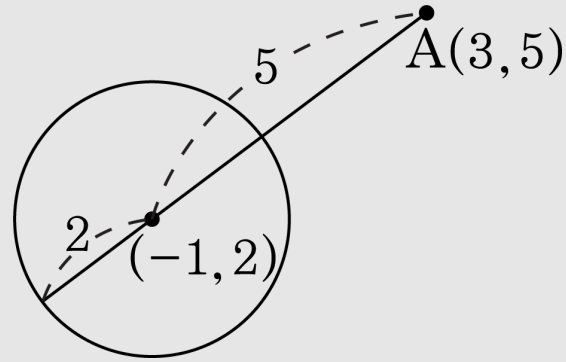
12. 점 A(3, 5) 와 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}$ 의 최솟값과 최댓값의 합은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 의 중심이 $(-1, 2)$ 이므로

점 A 와 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(-1-3)^2+(2-5)^2}=5$



이 때, 원의 반지름의 길이는 2 이므로

($\overline{AP}$ 의 최댓값)= 5+ (반지름의 길이)= $5+2=7$

($\overline{AP}$ 의 최솟값)= 5– (반지름의 길이)= $5-2=3$

따라서 구하는 합은 $7+3=10$

13. 세 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x \mid x$는 10의 약수$\}$, $C = \{x \mid x$는 16의 약수$\}$ 에 대하여 $A \cap B \cap C$ 를 원소나열법으로 옳게 나타낸 것은?

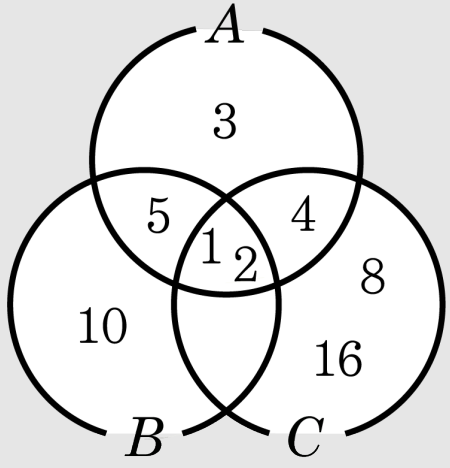
① $\{1, 2\}$ ② $\{1, 2, 4\}$ ③ $\{1, 2, 5\}$

④ $\{1, 2, 4, 5\}$ ⑤ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

해설

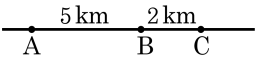
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 5, 10\}$,

$C = \{1, 2, 4, 8, 16\}$



$\rightarrow A \cap B \cap C = \{1, 2\}$

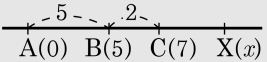
14. 직선 도로가 통과하는 세 마을 A, B, C가 있다. 마을 A와 마을 B사이의 거리는 5 km, 마을 B와 마을 C사이의 거리는 2 km이다. 이 도로 위에 마을 X가 있는데, 마을 X와 마을 A사이의 거리는 마을 X와 마을 C사이의 거리의 2배이다. 마을 X와 마을 B사이의 거리는? (단, 마을 X는 마을 A와 B사이에 있다.)



① $\frac{1}{5}$ km ② $\frac{1}{4}$ km ③ $\frac{1}{3}$ km ④ $\frac{1}{2}$ km ⑤ 1 km

해설

다음 그림과 같이 직선도로를 수직선, 마을 A를 원점으로 하면



$A(0), B(5), C(7)$이다. 이 때 $X(x)$

A와 X사이의 거리는 C와 X사이의 거리의 2배이므로

$|x-0| = 2|x-7|$, $|x| = 2|x-7|$

$\therefore\ 2(x-7) = \pm x$

$\therefore\ x = \frac{14}{3}$ 또는 $x = 14$

그런데 마을 X는 마을 A와 B사이에 있으므로

$x = \frac{14}{3}$ 이다.

따라서 X와 B사이의 거리는

$5 - \frac{14}{3} = \frac{1}{3}(\text{km})$ 이다.

15. 두 직선 $y = 2x, y = ax + b\,(a < 0, b > 0)$ 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 옮겨진 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 가 되었다. 이때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 직선의 방정식 $y = 2x,\ y = ax + b$ 를
연립하여 풀면 $2x = ax + b,\ (a-2)\,x = -b$

$\therefore x = -\frac{b}{a-2}\ (\because a \neq 2)$

이것을 $y = 2x$ 에 대입하면 $y = -\frac{2b}{a-2}$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는

$\left(-\frac{b}{a-2},\ -\frac{2b}{a-2}\right)$

따라서, 두 직선 $y = 2x,\ y = ax + b$ 및 y 축으로
둘러싸인 삼각형의 세 꼭지점의 좌표는

$(0,0)\,,(0,b)\,,\left(-\frac{b}{a-2}, -\frac{2b}{a-2}\right)$ 이므로

이 삼각형의 무게중심을 G 라고 하면

$$\mathrm{G}\left(\frac{-\frac{b}{a-2}}{3},\ \frac{b-\frac{2b}{a-2}}{3}\right)$$

이때, 점 G 와 대칭이동한 후의

삼각형의 무게 중심 $\left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 는

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$\left(\frac{-\frac{b}{a-2}}{3}, \frac{b-\frac{2b}{a-2}}{3}\right)$ 는 $\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$ 과 같다.

$\therefore -\frac{b}{a-2} = 2 \cdots\cdots ㉠$

$b - \frac{2b}{a-2} = 10 \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$b - 2 \cdot (-2) = 10$

$\therefore b = 6$

이것을 ㉠에 대입하면 $a = -1$

$\therefore a + b = 5$