1. 두 점 A$(a,\ 2b+a)$, B$(-a,\ a)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, a^2+b^2의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(-a-a)^2+\{a-(2b+a)\}^2}$$
$$= \sqrt{4a^2+4b^2} = 2\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{5}$$
$$\therefore\ a^2+b^2=5$$

2. $x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$ 이 원의 방정식이 되기 위한 m 의 범위는?

① $-3<m<1$ ② $-1<m<3$

③ $m<-3$ 또는 $1<m$ ④ $m<-1$ 또는 $3<m$

⑤ $0<m<3$

해설

$x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$

원이 되려면 $r>0$

$\{x+(m-1)\}^2+\{y-m\}^2+m^2+2m-3=0$

$(x+m-1)^2+(y-m)^2=3-2m-m^2$

$3-2m-m^2>0 \ \rightarrow \ m^2+2m-3<0$

$\therefore \ -3<m<1$

3. 도형 $y = 2x$를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $y = 2x$ ② $y = -2x$ ③ $y = \frac{1}{2}x$
④ $y = -\frac{1}{2}x$ ⑤ $y = 2x + 1$

해설

$y = x$대칭은 $x \to y$좌표로, $y \to x$를 대입한다.

4. 원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 일 때, 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을
y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x)^2+y^2+a(-x)+by=0$
즉, $x^2+y^2-ax+by=0$
이것이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 과
같으므로 계수를 비교하면
$-a=2-b,\ b=2a-4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=8$
$\therefore\ a+b=6+8=14$

5. 세 집합

$A=\{w,\ x,\ y,\ z\}$,

$B=\left\{x \mid x\text{는 30 미만의 30의 약수}\right\}$,

$C=\left\{x \mid x\text{는 25 이하의 소수}\right\}$ 일 때,

$n(A)+n(B)+n(C)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15\}$

$C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23\}$

$\therefore\ n(A)+n(B)+n(C)=4+7+9=20$

6. 두 집합 A, B 가 다음과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

$A = \{1,2,a,7,b\}$ 에 대하여 $\{1,3\}$ 과 $\{1,2,7,9\}$ 는 집합 A 의 부분집합이다. $B = \{1,2,3,c,9\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

해설

$\{1,3\}$ 과 $\{1,2,7,9\}$ 가 집합 A 의 부분집합이므로 집합 $A = \{1,2,3,7,9\}$ 또는 $a = 9,\ b = 3$ 이다. 따라서 $a = 3, b = 9$ 이다. 또한, $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 는 $A = B$ 를 의미하므로 $c = 7$ 이다.

$\therefore\ a+b+c = 3+9+7 = 19$

7. $\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\mathrm{A}(6,\ 1)$, $\mathrm{B}(-1,\ 2)$, $\mathrm{C}(2,\ 3)$이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

외심을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면

(1) $\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2+(b-1)^2 = (a+1)^2+(b-2)^2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PC}}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2+(b-1)^2 = (a-2)^2+(b-3)^2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡를 각각 전개하여 정리하면

$7a-b-16=0,\ 2a-b-6=0$

연립하여 풀면 $a=2,\ b=-2$

따라서 외심은 $(2,\ -2)$이다.

(2) $\overline{\mathrm{PA}}^2 = (2-6)^2+(-2-1)^2 = 25$

$\therefore \overline{\mathrm{PA}} = 5$

8. 두 점 $(2, 3), (1, 2)$를 지나는 직선 위에 두 직선 $y=3x+4,\ y=kx+2$의 교점이 있다고 한다. 이때, k의 값은?

① -3　② $\frac{5}{3}$　③ 8　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

해설

두 점 $(2, 3), (1, 2)$를 지나는 직선의 방정식은
$y=x+1$이고
두 직선 $y=3x+4,\ y=x+1$의 교점을
직선 $y=kx+2$가 지난다.
따라서 두 직선의 교점 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$은
직선 $y=kx+2$의 식을 만족한다.
$\therefore\ k=\frac{5}{3}$

9. 두 점에서 만나는 두 원

$x^2+y^2-1=0 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2-2x+2y-1=0 \cdots\cdots$ ㉡

과 x, y 에 대한 방정식

$k\left(x^2+y^2-1\right)+\left(x^2+y^2-2x+2y-1\right)=0$ (단, k 는 실수) $\cdots\cdots$ ㉢

에 대하여 ㉢은 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지나는 원의 방정식이거나 두 원 ㉠, ㉡의 공통현의 방정식임을 보인 과정이다. (가) ~ (마) 에 들어갈 말로 옳은 것은?

> 먼저 방정식 ㉢이 원이나 직선을 나타냄을 보이고, 또 ㉢이 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지남을 보인다.
>
> (i) 방정식 ㉢을 정리하면
>
> $(k+1)x^2+(k+1)y^2-2x+2y-(k+1)=0 \cdots\cdots$ ㉣
>
> 이 때, $k=-1$ 이면 방정식 ㉣은
>
> (가), 즉 $y=x$ 가 되어 (나)을 나타낸다.
>
> 또한, $k \neq -1$ 이면 방정식 ㉣은 (나)의 꼴이 되어 x^2 과 y^2 의 계수가 같고 xy 의 항이 없으므로 (다)을 나타낸다.
>
> 즉, 방정식 ㉢은 (나) 또는 (다)을 나타낸다.
>
> (ii) 두 원 ㉠,㉡의 교점을 (α, β) 라고 하면 $\alpha^2+\beta^2-1=0, \alpha^2+\beta^2-2\alpha+2\beta-1=0$ 이므로 임의의 실수 k 에 대하여 (라)이 성립한다.
>
> 따라서, 방정식 ㉢의 그래프는 k 의 값에 관계없이 점 (α, β) , 즉 (마)를 지난다.
>
> (i), (ii)로부터 ㉢은 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지나는 원의 방정식이거나 공통현의 방정식이다.

① (가) : $2x-2y=1$

② (나) : 원

③ (다) : 직선

④ (라) : $k\left(\alpha^2+\beta^2-1\right)+(-2\alpha+2\beta-1)=0$

⑤ (마) : 두 원 ㉠, ㉡의 교점

해설

① (가) : $-2x+2y=0$

② (나) : 직선

③ (다) : 원

④ (라) : $k\left(\alpha^2+\beta^2-1\right)+\left(\alpha^2+\beta^2-2\alpha+2\beta-1\right)=0$

10. 두 원 $x^2+y^2-x+2y-3=0$, $2x^2+2y^2-6x+ay-2=0$ 의 공통현이 직선 $y=-3x-1$ 과 직교할 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$2(x^2+y^2-x+2y-3)-(2x^2+2y^2-6x+ay-2)=0$

즉, $4x+(4-a)y-4=0 \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠과 직선 $y=-3x-1$ 은 직교하므로

$\dfrac{-4}{4-a}\times(-3)=-1$ 에서 $a=16$

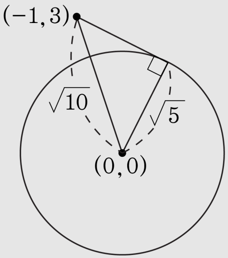
11. $x^2+y^2=5$ 밖의 한 점 $(-1,3)$ 에서 이 원에 접선을 그을 때, 점 $(-1,3)$ 에서 접점까지의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{5}$

해설

접선의 길이를 구하는 것이므로
$\sqrt{1^2+(-3)^2-5}=\sqrt{5}$



12. 직선 $x-y+2=0$ 에 대하여 점 A(3, 4) 와 대칭인 점의 좌표를 (x', y') 이라 할 때, $x'+y'$ 을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y=x+2$ 이므로 A(3, 4) 를 직선에 대해
대칭시킨 점을 (x', y') 라 하면,
$x'=y-2 \quad y'=x+2,\ (x, y)=(3, 4)$ 이므로
$x'=2\ y'=5$, $\therefore\ x'+y'=7$

13. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 12 의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 $\square$ 의 배수$\}$에 대하여 $A \subset B$ 이고 $A \neq B$ 일 때, $\boxed{}$ 안에 알맞은 가장 큰 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

A 는 B 의 진부분집합이고,
$A = \{12,\ 24,\ 36,\ \cdots\}$ 이므로
$B = \{x \mid x$는 $\square$ 의 배수$\}$ 의 $\square$에는 12 의 약수 중 12를 제외한 수가 들어가야 한다.
따라서 $\square$ 안에 들어갈 수는 1, 2, 3, 4, 6 이고, 가장 큰 자연수는 6 이다.

14. 50 명의 학생 중 물감을 준비해 온 학생은 32 명, 크레파스를 준비해 온 학생은 24 명, 물감 또는 크레파스를 준비해 온 학생은 40 명이다. 물감만 준비한 학생을 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 16 명

해설

전체 학생의 집합을 U, 물감을 준비해 온 학생의 집합을 A, 크레파스를 준비해 온 학생을 B 라 하자.

$n(U) = 50, n(A) = 32, n(B) = 24, n(A \cup B) = 40$ 이다.

$n(A - B) = n(A \cup B) - n(B) = 40 - 24 = 16$ 이다.

15. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$가 있다. 이 0때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$의 최솟값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원점을 $\mathrm{O}(0,\ 0)$이라 하면

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$

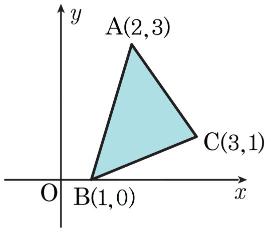
$=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$이므로

이 값이 최소가 되는 것은 세 점 O, A, B가 일직선 위에 있을 때이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$의 최소값은

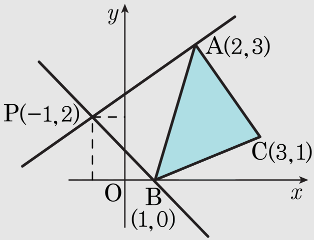
$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

16. 직선 $y=-mx-m+2$ 가 아래 그림의 삼각형 ABC 를 지나기 위한 m 의 범위는?



① $-1 \le m \le 3$
② $-1 \le m \le \frac{1}{3}$
③ $-\frac{1}{3} \le m \le 1$
④ $-\frac{1}{3} \le m \le 3$
⑤ $1 \le m \le 3$

해설



직선 $y=-mx-m+2$ 에서 $mx+y+m-2=0$

$m(x+1)+y-2=0$ 이므로

점 P$(-1,\ 2)$ 를 반드시 지난다.

따라서 직선 $y=-mx-m+2$ 가 $\triangle$ABC 를 지나기 위한 기울기 $-m$ 의 범위는

(직선 PB 의 기울기) $\le -m \le$ (직선 PA 의 기울기)

직선 PB 의 기울기는 $\frac{2-0}{-1-1}=-1$

직선 PA 의 기울기는 $\frac{2-3}{-1-2}=\frac{1}{3}$

$-1 \le -m \le \frac{1}{3}$

$\therefore\ -\frac{1}{3} \le m \le 1$

17. 집합 $A=\{\varnothing,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \{1,\ 3,\ 5\}\}$, $B=\{\varnothing,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \{1,\ 3,\ 5\}\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 골라라.

㉠ $\varnothing \notin A$	㉡ $7 \subset B$
㉢ $\{1,\ 3,\ 5\} \subset B$	㉣ $\{\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}\} \in A$
㉤ $A \subset B$	

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

㉠ $\varnothing \in \{\varnothing\}$ 이고,$\varnothing \notin \varnothing$, $\varnothing \subset \varnothing$ 이다.
㉡ $7 \in B$
㉣ $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ 는 집합 A 의 부분집합이므로 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\} \subset A$
㉤ $B \subset A$

18. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B = \{1, 3, 4\}$, $A^C \cap B = \{4\}$ 일 때, 집합 A 가 될 수 있는 모든 집합의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

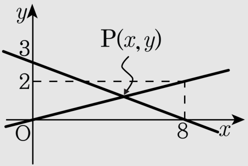
$B = \{1, 3, 4\}$, $A^C \cap B = \{4\}$ 이므로 남은 원소는 2 , 5 이므로 A 가 될 수 있는 모든 집합의 개수는 $2 \times 2 = 4$(개) 이다.

19. 한 어린이가 길의 양쪽 모두에 가로등이 있는 길을 걷고 있던 중 그림자의 끝이 각각 가로등의 밑 부분과 일치하였다. 가로등의 길이는 각각 3 m, 2 m 이고, 두 가로등 사이의 거리는 8 m 일 때이 어린이의 키는 몇 m 인가 구하면? (단, 두 가로등과 어린이는 일직선 위에 있다.)

① 1.5 m ② 1.4 m ③ 1.3 m ④ 1.2 m ⑤ 1.1 m

해설

두 직선의 교점은 두 직선의 방정식을 연립하여 구한다.
어린이의 키를 나타내는 값은 그림과 같이



$y = \frac{1}{4}x$와 $y = -\frac{3}{8}x + 3$의 교점이 P의 y좌표이므로

두 식을 연립하여 풀면 $x = 4.8$, $y = 1.2$

따라서, 어린이의 키는 1.2 m 이다.

20. 집합 $P = \left\{2x+1 | x\text{는 6보다 작은 자연수}\right\}$ 의 부분집합 $A = \{3, 5\}, B = \{5, 7, 9\}$ 에 대하여 $A \cup X = B \cup X$ 를 만족하는 집합 P 의 부분집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿개

▷ 정답 : 4 개

해설

$P = \left\{2x+1 | x\text{는 6보다 작은 자연수}\right\} = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

$A = \{3, 5\}, B = \{5, 7, 9\}$

$A \cup X = B \cup X$ 를 만족하는 X 는 원소 $3, 7, 9$ 를 반드시 포함하는 집합 P 의 부분집합이다.

따라서 부분집합 X 의 개수는 $2^{5-3} = 4$ (개)