1. 다항식 $f(x)$를 $2x^2+3x+2$로 나누었더니 몫이 $3x-4$이고, 나머지가 $2x+5$이었다. 이 때, $f(1)$의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 3　⑤ 5

해설

$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$
$=6x^3+9x^2+6x-8x^2-12x-8+2x+5$
$=6x^3+x^2-4x-3$
$\therefore\ f(1)=6+1-4-3=0$

해설

$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$
$f(1)=(2+3+2)(3-4)+(2+5)=-7+7=0$

2. $i(x+2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 5

해설

$$\begin{aligned} i(x+2i)^2 &= i(x^2+4ix-4) = x^2 i - 4x - 4i \\ &= -4x + (x^2-4)i \end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.

$\therefore\ x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

3. 이차방정식 $x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8　② -4　③ -2　④ 5　⑤ 2

해설

$x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$
$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$
$(1-k)x^2 + 7x + 3 = 0$
(ⅰ) 주어진 방정식이 이차방정식이므로
x^2의 계수는 $1-k \neq 0$ 이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$
(ⅱ) 주어진 이차방정식이
허근을 갖기 위해서는
판별식 $D < 0$이어야 하므로
$D = 7^2 - 4 \cdot (1-k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$
$37 + 12k < 0$
$\therefore k < -\frac{37}{12}$
따라서 최대정수는 -4이다.

4. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 10$ 의 최댓값을 M , $y = 3x^2 + 6x - 5$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$y = -x^2 + 2x + 10$

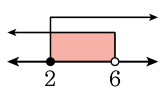
$= -(x-1)^2 + 11,\ M = 11$

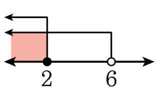
$y = 3x^2 + 6x - 5$

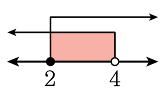
$= 3(x+1)^2 - 8,\ m = -8$

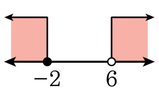
$\therefore M + m = 11 - 8 = 3$

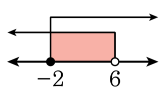
5. 부등식 $3x-11<x+1\le 4x-5$ 의 해를 수직선에 바르게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$$\begin{cases} 3x-11<x+1 \\ x+1\le 4x-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<6 \\ x\ge 2 \end{cases}$$

따라서 $2\le x<6$

6. 이차함수 $y = kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2$ 의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 정수 k의 값들의 합은?

① -3　　② -5　　③ 7　　④ 3　　⑤ 5

해설

이차방정식 $kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2 = 0$ 이
서로 다른 두 실근을 가지므로
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4} = (2\sqrt{2})^2 - k(k+2) > 0$
$8 - k^2 - 2k > 0, (k+4)(k-2) < 0$
$\therefore\ -4 < k < 2$
따라서 정수 k 는 $-3, -2, -1, 0, 1$ 이다.
$\therefore\ (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 = -5$

7. 사차식 $x^4 - 4x^2 - 12$ 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2i})(x-\sqrt{2i})$

② $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+2i)(x-2i)$

③ $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2i})(x-\sqrt{2i})$

④ $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i)$

⑤ $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{6i})(x-\sqrt{6i})$

해설

$x^4 - 4x^2 - 12,\quad x^2 = Y$ 라 하자

$\Rightarrow \quad Y^2 - 4Y - 12 = (Y+2)(Y-6) = 0$

$Y = -2$ 또는 $Y = 6$

$\Rightarrow \quad x^2 = -2,\quad x^2 = 6$

$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}i,\quad x = \pm\sqrt{6}$

$\therefore\ x^4 - 4x^2 - 12$

$= (x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2i})(x-\sqrt{2i})$

8. 포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$과 x축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, 모든 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 2k,\ \alpha\beta = 2k + 3$

$|\alpha - \beta| = 2\sqrt{5}$에서 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$이므로

$20 = (2k)^2 - 4(2k + 3),\ 4k^2 - 8k - 12 = 20$

$k^2 - 2k - 8 = 0$

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 2이다.

9. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-1>5 \\ \dfrac{x-5}{2} \le \dfrac{x}{4}+3 \end{cases}$ 의 해가 $a<x\le b$일 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

$\begin{cases} 2x-1>5 \\ \dfrac{x-5}{2} \le \dfrac{x}{4}+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ x\le 22 \end{cases}$

$3<x\le 22$에서 $a=3,\ b=22$

$\therefore ab=66$

10. 부등식 $|2x-1| < 8-x$를 만족하는 정수 x의 개수는?

① 7개 ② 8개 ③ 9개 ④ 10개 ⑤ 11개

해설

(i) $8-x>0 \quad \therefore x<8$

(ii) $|2x-1| < 8-x$에서 $-8+x<2x-1<8-x$

$-8+x<2x-1$에서 $-x<7$, $x>-7$

$2x-1<8-x$에서 $3x<9$, $x<3$

$\therefore -7<x<3$

11. x에 대한 다항식 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지는 $2x-7$이고, $x^2-3x-10$으로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이 다항식 $f(x)$를 x^2-6x+5로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$ ② $4x+3$ ③ $x-1$
④ $4x-9$ ⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 x^2-6x+5로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$f(x)=(x^2-6x+5)Q(x)+ax+b$$
$$=(x-1)(x-5)Q(x)+ax+b \cdots ㉠$$

$f(x)$를 x^2-4x+3으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
$x^2-3x-10$으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$f(x)=(x^2-4x+3)Q_1(x)+2x-7$$
$$=(x-1)(x-3)Q_1(x)+2x-7$$

$$f(x)=(x^2-3x-10)Q_2(x)+11$$
$$=(x-5)(x+2)Q_2(x)+11$$

이므로 $f(1)=-5,\ f(5)=11$이다.
㉠에서
$f(1)=a+b=-5$
$f(5)=5a+b=11$이므로 연립하여 풀면
$a=4,\ b=-9$
따라서 구하는 나머지는 $4x-9$이다.

12. 다항식 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$가 이차다항식의 완전제곱꼴이 되도록 a의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$
$= (x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+a$
$= (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+a$
$x^2+8x=A$로 놓으면
(준식) $= (A+7)(A+15)+a$
$= A^2+22A+105+a$
$= (A+11)^2-16+a$
따라서, $a=16$일 때 이차식 $x^2+8x+11$의 완전제곱식이 된다.

13. 삼차방정식 $(x-1)(x^2-ax+2a)=0$이 중근을 가질 때, 실수 a의 값을 모두 구하면?

① -1 ② $0, 8$ ③ $-1, 8$
④ $-1, 0, -8$ ⑤ $-1, 0, 8$

해설
(ⅰ) $x=1$을 중근으로 가질 때
$x=1$을 $x^2-ax+2a=0$에 대입하면 $a=-1$
(ⅱ) $x^2-ax+2a=0$이 중근을 가질 때
$D=a^2-8a=0$
$\therefore a=0$ 또는 8
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=-1, 0, 8$

14. $\alpha = -2 + i$, $\beta = 1 - 2i$ 일 때 $\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 10 ⑤ 20

해설

$\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$
$= \alpha(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) + \beta(\overline{\alpha} + \overline{\beta})$
$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta})$
$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta})$
$= (-1 - i)(-1 + i)$
$= 2$

15. 이차방정식 $x^2-(a+2)bx+(a+1)b=0$ ($a>0,\ b>0$)이 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 두 개의 근이 모두 1보다 크기 위해서 필요한 조건은?

① $b>1$　② $b<1$　③ $b>2$　④ $b<2$　⑤ $b>3$

해설

실근을 가질 조건은 $(a+2)^2b^2-4(a+1)b>0$

$\therefore\ b>\dfrac{4(a+1)}{(a+2)^2}\cdots$ (i)

여기서, 두 근이 모두 1 이하라 하면

(두 근의 합)$=(a+2)b\le 2\cdots$ (ii)

(i), (ii)에서 $\dfrac{4(a+1)}{a+2}<2$

$\therefore\ a<0$

이것은 문제의 조건에 모순된다.

$\therefore$ 적어도 한 개의 근은 1보다 크다.

그러므로 $f(1)>0$이면 두 근이 모두 1보다 크게 된다.

$\therefore f(1)=1-(a+2)b+(a+1)b>0\quad\therefore\ b<1$