1. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax - 9 + 2a^2 = 0$ 이 실근 $\alpha,\ \beta$ 를 가질 때, $|\alpha - \beta|$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + 2ax - 9 + 2a^2 = 0$ 에서
근과 계수와의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = -2a,\ \alpha\beta = -9 + 2a^2$
$|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-2a)^2 - 4(-9 + 2a^2) = -4a^2 + 36$
그런데 $\dfrac{D}{4} = a^2 + 9 - 2a^2 \geq 0$
$\therefore\ \ -3 \leq a \leq 3$
$\therefore\ \ 0 \leq |\alpha - \beta|^2 \leq 36$
즉, $0 \leq |\alpha - \beta| \leq 6$
$\therefore$ (최댓값)+ (최솟값)$= 0 + 6 = 6$

2. $a^2 = 3$일 때, 다음 식의 값을 구하면?

$$P = \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2$$

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$(2+a)^n = \alpha,\ (2-a)^n = \beta$로 놓으면

$$P = \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2$$
$$= (\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 = 4\alpha\beta$$
$$= 4(2+a)^n(2-a)^n = 4(4-a^2)^n$$
$$= 4(4-3)^n = 4$$

3. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005 = x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}\\ &= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}\\ &= x+1\\ &= 2006\end{aligned}$$

4. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=7$, $x+y=3$ 일 때, x^5+y^5 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 123

해설

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$에서 $3^2=7+2xy$, $xy=1$
$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$에서 $x^3+y^3=18$

$$\begin{aligned}x^5+y^5 &= (x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)\\ &= 7\times 18-1^2\times 3\\ &= 123\end{aligned}$$

5. $x^{113}+1$ 을 x^3+x 로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라고 하자. 이때, $R(2006)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2007

해설

$$\begin{aligned} x^{113}+1 &= (x^3+x)Q(x)+R(x) \\ &= x(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx+c \end{aligned}$$

항등식이므로 $x=0, x^2=-1$ 을 각각 대입하면,

$1=c,\ x+1=-a+bx+c$

$\therefore a=0,\ b=1$

$\therefore R(x)=x+1$

따라서 $R(2006)=2007$

6. x^4-11x^2+1 이 $(x^2+ax+b)(x^2+3x+b)$로 인수분해될 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

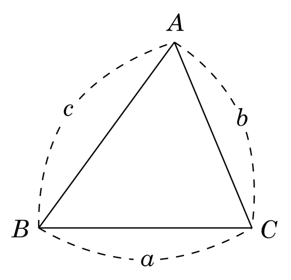
해설

$$\begin{aligned} x^4-11x^2+1 &= (x^2-1)^2-9x^2 \\ &= (x^2-1)^2-(3x)^2 \\ &= (x^2-3x-1)(x^2+3x-1) \\ &= (x^2+ax+b)(x^2+3x+b) \end{aligned}$$

$\therefore\ a=-3,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=-4$

7. 다음 그림과 같이 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle$ABC에서 $a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)=0$이 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?



① $a=b$인 이등변삼각형　② $a=c$인 이등변삼각형
③ $\angle$A $=90°$인 직각삼각형　④ $\angle$B $=90°$인 직각삼각형
⑤ $\angle$C $=90°$인 직각삼각형

해설

$a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)$
$=a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2+b^2c+bc^2-c^2a-ca^2$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^3+b^2c+bc^2+c^3$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^2(b+c)+c^2(b+c)$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+(b+c)(b^2+c^2)$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)(a-b-c)$
$=(a-b-c)a^2-(b^2+c^2)(a-b-c)$
$=(a-b-c)(a^2-b^2-c^2)$
$=0$
이 때, a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a\neq b+c$
$\therefore\ a^2-b^2-c^2=0$,
즉 $a^2=b^2+c^2$
따라서, $\triangle$ABC는 a를 빗변으로 하는 직각삼각형,
즉 $\angle$A $=90°$인 직각삼각형이다.

8. 인수분해 공식 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 을 이용하여 $\dfrac{9999^3+1}{9998\times 9999+1}$ 을 계산하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10000

해설

$9999=a$ 라 하면

$$\frac{9999^3+1}{9998\times 9999+1}=\frac{a^3+1}{(a-1)a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$=a+1=10000$$

9. 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $[a,\ b,\ c] = a^2 + bc$라 하고 $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 + z^2 = 12$일 때, $[x,\ 2y,\ z] + [y,\ 2z,\ x] + [z,\ 2x,\ y]$의 값은?

① 10　② 22　③ 88　④ 100　⑤ 144

해설

$[x,\ 2y,\ z] + [y,\ 2z,\ x] + [z,\ 2x,\ y]$
$= x^2 + 2yz + y^2 + 2zx + z^2 + 2xy$
$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
$= (x + y + z)^2 = 100$

10. x에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$이 실근을 갖기 위한 실수 a의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$(ax^2+3x+2a)+(-ax^2+2ax+3)i=0$ 이어야 하므로

$ax^2+3x+2a=0 \cdots\cdots$ ㉠

$-ax^2+2ax+3=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ 하면

$(2a+3)x+(2a+3)=0$, $(2a+3)(x+1)=0$

$2a+3=0$ 또는 $x+1=0$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

i) $a=-\frac{3}{2}$ 일 때

㉠식에서 $-\frac{3}{2}x^2+3x-3=0,\ x^2-2x+2=0$

이므로 허근을 가진다. $\therefore\ a \neq -\frac{3}{2}$

ii) $x=-1$ 일 때 ㉠에 대입하면,

$a-3+2a=0,\ 3a=3 \quad \therefore\ a=1$

11. 자연수 n에 대해 $x = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n} + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$ ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$x = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right\}^n + \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2\right\}^n$$

$$= \left(\frac{2}{2i}\right)^n + \left(\frac{2}{-2i}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{i}\right)^n + \left(-\frac{1}{i}\right)^n = (-i)^n + i^n$$

i^n 은 $n = 4k$, $n = 4k+1$, $n = 4k+2$, $n = 4k+3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n = 4k$ 이면 $x = 1+1 = 2$

(ii) $n = 4k+1$ 이면 $x = -i+i = 0$

(iii) $n = 4k+2$ 이면 $x = -1-1 = -2$

(iv) $n = 4k+3$ 이면 $x = i-i = 0$

$\therefore\ x = 2,\ 0,\ -2$

따라서, x가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

12. 복소수 z 에 대하여 다음 보기 중 항상 실수인 것을 모두 고르면?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $z \neq 0$ 이다

㉠ $z+\bar{z}$	㉡ $z\bar{z}$	㉢ $(z-\bar{z})^2$
㉣ $\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}$	㉤ $\frac{\bar{z}}{z}$	

① ㉠　　② ㉠,㉡

③ ㉠,㉡,㉢　　④ ㉠,㉡,㉢,㉣

⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉤

해설

$z=a+bi$ 라 하자 $\Rightarrow$ $\bar{z}=a-bi$

㉠ $z+\bar{z}=2a$

㉡ $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

㉢ $(z-\bar{z})^2=(2bi)^2=-4b^2$

㉣ $\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}-\frac{a+bi}{a^2+b^2}=\frac{-2bi}{a^2+b^2}$

㉤ $\frac{\bar{z}}{z}=\frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}$

13. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)i$ 의 값은?

① $\frac{y}{2}$ ② $-y$ ③ $2x$ ④ $\frac{-x}{2}$ ⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

그러므로 $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)i = \frac{1}{2}(z - \bar{z})i$

$= \frac{1}{2}(x + yi - x + yi)i$

$= \frac{1}{2}(2yi)i = -y$

14. $z = \dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때, $1 + z + z^2 + \cdots + z^{2008}$ 의 값은?

① $-i$ ② -1 ③ 0 ④ i ⑤ 1

해설

$z = \dfrac{1+i}{1-i} = i, z^2 = -1,\ z^3 = -i,\ z^4 = 1$

(준식) : $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$

처음 네 항의 합 :

$1 + i - 1 - i = 0$

$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$

$= 0 + 0 + \cdots + 0 + z^{2008}$

$= z^{2008}$

$= (z^4)^{502}$

$= 1$

15. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+14x+15=0$의 한근이 $1+2i$일 때, 두 실수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

한 근이 $1+2i$이면 $x=1+2i,\ \ x^2=-3+4i,\ \ x^3=-11-2i,\ \ x^4=-7-24i,$

$x^4+ax^3+bx^2+14x+15$

$=(-7-24i)+a(-11-2i)+b(-3+4i)+14(1+2i)+15=0,$

$(-11a-3b-7+14+15)+(-24-2a+4b+28)i$

$\therefore\ 11a+3b=22,\ -2a+4b=-4$

연립하여 풀면 $a=2, b=0$

해설

$x=1+2i$에서 $x^2-2x+5=0$

$x^4+ax^3+bx^2+14x+15=(x^2-2x+5)(x^2+kx+3)$

좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면

$a=k-2,\ b=8-2k,\ 14=5k-6$

$\therefore\ \ k=4,\ a=2,\ b=0$

16. n 이 자연수일 때, $x^{2n}(x^2+ax+b)$ 를 $(x+2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $4^n(x+2)$ 가 되도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

해설

(ⅰ) $f(x) = x^{2n}(x^2+ax+b)$
$= (x+2)^2Q(x) + 4^n(x+2)$

$f(-2) = 4^n(4-2a+b) = 0$

$\therefore\ b = 2a-4$

(ⅱ) $f(x) = x^{2n}(x^2+ax+2a-4)$
$= x^{2n}(x+2)(x+a-2)$
$= (x+2)^2Q(x) + 4^n(x+2)$

$\therefore x^{2n}(x+a-2) = (x+2)Q(x) + 4^n$

$x=-2$ 를 대입하면

$4^n(-4+a) = 4^n,\ -4+a = 1$

$\therefore\ a = 5$

$b = 2a-4$ 에서 $b = 6$

$\therefore\ a+b = 11$

17. 임의의 자연수 k에 대하여 $x-k$로 나눈 나머지가 k인 다항식 $f(x)$의 개수를 구하면?

① 0개 ② 1개 ③ 2개

④ 3개 ⑤ 무수히 많다.

해설

나머지 정리에 의하여 임의의 자연수 k에 대하여 $\therefore\ f(k)=k$
따라서 $g(x)=f(x)-x$로 두면 모든 자연수에 대해서 $g(x)=0$이 성립
$\therefore\ g(x)=0$
즉, $f(x)=x$
$\therefore$ 1개

18. x^8 을 $x+\frac{1}{2}$ 으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q\left(-\frac{1}{2}\right)$ 을 구하면?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $-\frac{1}{8}$ ④ $-\frac{1}{16}$ ⑤ $-\frac{1}{32}$

해설

$x^8 = \left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$

$x=-\frac{1}{2}$ 를 대입하면 $R=\frac{1}{2^8}$

$x^8 = \left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+\frac{1}{2^8}$

$x^8-\frac{1}{2^8} = \left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)$

$\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)$

$\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=Q(x)$

$\therefore Q\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right)\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{1}{16}$

19. 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $2x+1$이고, $(x-2)^3$으로 나눈 나머지가 x^2-x+6이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-2)^2$으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$　　② $3x-2$　　③ $3x+2$

④ x^2-2x+1　　⑤ x^2-x+6

해설

$f(x)=(x+1)^2A(x)+2x+1$에서 $f(-1)=-1$

$f(x)=(x-2)^3B(x)+x^2-x+6$

$\quad=(x-2)^3B(x)+(x-2)^2+3x+2$

$\quad=(x-2)^2\{(x-2)B(x)+1\}+3x+2$

즉 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 ax^2+bx+c라 하면

$f(x)=(x+1)(x-2)^2Q(x)+ax^2+bx+c$

$\quad=(x+1)(x-2)^2Q(x)+a(x-2)^2+3x+2$

$f(-1)=9a-1=-1\quad \therefore a=0$

$ax^2+bx+c=a(x-2)^2+3x+2$

$\therefore$구하는 나머지는 $3x+2$

20. x 에 대한 다항식 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 에 대하여 $f(x)+2,\ xf(x)+2$ 가 모두 일차식 $x-\alpha$ 로 나누어 떨어질 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha)+2=0, \alpha f(\alpha)+2=0$

$f(\alpha)=-2, \alpha=1$

$\therefore f(1)=-2$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f(1)=1+a+b+c=-2$

$\therefore a+b+c=-3$

21. 두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나눈 몫을 Q_1 , 나머지를 R_1 이라 할 때, B 는 R_1 로 나누어 떨어지고 그 몫은 Q_2 이다. 이 때, A, B 의 최소공배수는? (단, A 의 차수가 B 의 차수보다 크다.)

① AB　　② $\dfrac{AB}{R_1}$　　③ $\dfrac{AB}{Q_1}$

④ $\dfrac{AB}{Q_2}$　　⑤ $\dfrac{AB}{Q_1Q_2}$

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면

$A = BQ_1 + R_1 \cdots$ ㉠

$B = R_1Q_2 \cdots$ ㉡

유클리드의 호제법에 의하여

A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R_1 의 최대공약수와 같다.

㉠, ㉡에서 B 와 R_1 의 최대공약수는 R_1 이므로

A 와 B 의 최대공약수는 R_1 이다.

따라서, A, B 의 최소공배수는 $\dfrac{AB}{R_1}$

22. 복소수 z_k (k 는 자연수)를 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \bar{z}_1 + (1 - i)$, $z_3 = \bar{z}_2 + (1 - i), \cdots$ 와 같은 방법으로 정할 때, $\bar{z}_{100}$ 의 값은?(단, $i = \sqrt{-1}$, $\bar{z}$ 은 z 의 켤레복소수)

① $50 + i$ ② $50 - i$ ③ $100 + 2i$

④ $100 - 2i$ ⑤ $200 + 4i$

해설

$z_1 = 1 + i,\ z_2 = (1 - i) + (1 - i) = 2 - 2i,$

$z_3 = 3 + i, z_4 = 4 - 2i, z_5 = 5 + i \cdots\cdots$

$\Rightarrow\ z_{2n+1} = (2n + 1) + i,\ \ z_{2n} = 2n - 2i$

$\therefore \bar{z}_{100} = 100 + 2i$

23. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x^2-2x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$

$\alpha\beta<0$이므로 $\frac{\beta}{\alpha}<0,\ \ \frac{\alpha}{\beta}<0$

$$\therefore \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2=\frac{\beta}{\alpha}-2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\frac{\alpha}{\beta}$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+2\left(\because \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}}\right)$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}+2$$

$$=-4$$

해설

24. 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 두 방정식 $x^2+2ax+b=0$과 $x^2+2bx+a=0$의 두 근의 차가 서로 같을 때, a, b의 관계식은?

① $a+b=0$ ② $a-b-1=0$ ③ $a-b+1=0$
④ $a+b-1=0$ ⑤ $a+b+1=0$

해설

$x^2+2ax+b=0$의 해를 α, β
$x^2+2bx+a=0$의 해를 γ, δ라 하면
$|\alpha-\beta|=|\gamma-\delta|$에서
$(\alpha-\beta)^2=(\gamma-\delta)^2$,
$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta$
$(-2a)^2-4b=(-2b)^2-4a$
$\therefore\ (a-b)(a+b+1)=0$
$a\neq b$이므로 $a+b+1=0$

25. 실계수 이차방정식이 두 허근 α, β를 갖고 $\alpha^2 + 2\beta = 1$일 때, 이 이차 방정식은?

① $x^2 + 2x + 3 = 0$
② $x^2 + 4x + 6 = 0$
③ $x^2 - 2x + 3 = 0$
④ $x^2 - 4x + 6 = 0$
⑤ $x^2 - 3x + 2 = 0$

해설

$\alpha = m + ni,\ \beta = m - ni$
$(m,\ n\ :\ $ 실수, $n \neq 0)$라 놓으면
$\alpha^2 + 2\beta = (m + ni)^2 + 2(m - ni)$
$\quad = (m^2 - n^2 + 2m) + 2n(m - 1)i = 1$에서
$n \neq 0$이므로 $m = 1,\ n^2 = 2$
$\alpha + \beta = 2m = 2$
$\alpha\beta = m^2 + n^2 = 3$
$\therefore\ \alpha,\ \beta$를 두 근으로 갖는 이차방정식은
$x^2 - 2x + 3 = 0$

26. x에 대한 이차방정식 $x^2-(p+1)x+p+5=0$의 두근 α, β가 모두 양의 정수일 때, $\alpha>\beta$를 만족하는 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 1 개

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta=p+1,\ \alpha\beta=p+5$

$\therefore \alpha+\beta-1=\alpha\beta-5$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=5$

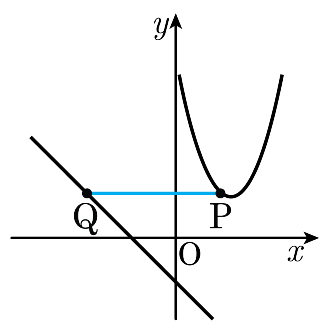
α, β 모두 양의 정수이고, $\alpha>\beta$이므로

$\alpha-1=5,\quad \beta-1=1$

$\alpha=6,\ \ \beta=2$

$\therefore (6,\ 2)$ 1 개

27. 다음 그림에서 포물선 $y=x^2-5x+8$ 위의 한 점 P 와 직선 $y=-x-2$ 위의 한 점 Q 에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 가 x 축에 평행할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=x^2-5x+8$ 에서 점 P 의 좌표는 $\mathrm{P}(a, a^2-5a+8)$
$y=-x-2$ 에서 점 Q 의 좌표는 $\mathrm{Q}(b, \ -b-2)$
점 P 와 점 Q 의 y 좌표가 같으므로
$a^2-5a+8=-b-2, \ b=-a^2+5a-10$ 이다.
$\overline{\mathrm{PQ}}=a-b=a^2-4a+10=(a-2)^2+6$
$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값은 6 이다.

28. $0 \le \frac{p}{2} \le 1$, $2p - q \le 3$ 를 만족하는 실수 p, q 에 대하여 이차함수 $y = -x^2 + px + q$ $(0 \le x \le 1)$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$y = -x^2 + px + q = -\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + q + \frac{p^2}{4}$

이때, $0 \le \frac{p}{2} \le 1$ 이고 $0 \le x \le 1$ 이므로

최댓값 M 은 $x = \frac{p}{2}$ 일 때이다.

$\therefore\ M = q + \frac{p^2}{4}$

또한 $2p - q \le 3$ 에서 $q \ge 2p - 3$

$\therefore\ M \ge \frac{p^2}{4} + 2p - 3 = \frac{1}{4}(p+4)^2 - 7$

따라서 M 의 최솟값은 -7 이다.

29. x, y 가 실수일 때, $f(x,\ y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

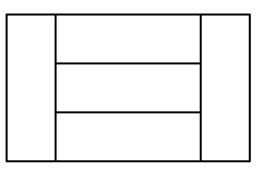
▷ 정답: -5

해설

$f(x,\ y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y$
$= x^2 - 2(y-1)x + 2y^2 + 2y$
$= \left\{x - (y-1)\right\}^2 + (y+2)^2 - 5$

따라서 $x = -3$, $y = -2$ 일 때, 최솟값 -5

30. 다음 그림에서 직사각형의 변을 제외한 직사각형 내부의 선분의 길이의 총합이 48 이고, 내부의 5 개의 직사각형의 넓이는 모두 같다. 큰 직사각형의 넓이가 최대일 때의 큰 직사각형의 가로의 길이를 y , 세로의 길이를 x 라 할 때, xy 의 값을 구하여라.

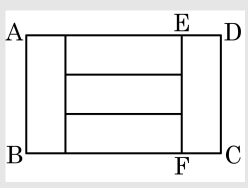


▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

그림에서



□CDEF $= \frac{1}{5}$□ABCD 이므로

$\overline{\mathrm{DE}} = \frac{1}{5}y$

직사각형 내부 선분의 길이의 합이 48 이므로

$2x + \frac{6}{5}y = 48$,

$\therefore\ y = -\frac{5}{3}x + 40$

직사각형 ABCD 의 넓이를 S 라 하면

$S = xy = x\left(-\frac{5}{3}x + 40\right)$

$\quad = -\frac{5}{3}(x-12)^2 + 240$

$\therefore\ x = 12$ 일 때, 큰 직사각형의 넓이가 최대가 되므로 $y = \left(-\frac{5}{3}\right) \times 12 + 40 = 20$

따라서 $xy = 240$ 이다.

31. $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$의 한 허근을 w라 할 때, $w^{2006}+\left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

짝수차 상반방정식이므로
양변을 x^2으로 나누면
$x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$
$\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}-3=0$
$x+\frac{1}{x}=z$로 놓으면
$z^2+2z-3=(z+3)(z-1)=0$
$\therefore\ z=-3$ 또는 $z=1$
(ⅰ) $z=-3$일 때,
$x+\frac{1}{x}=-3$에서 $x^2+3x+1=0$
$\therefore\ x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$: 실근
(ⅱ) $z=1$일 때,
$x+\frac{1}{x}=1$에서
$x^2-x+1=0$
$x^2-x+1=0$의 해는 허수이므로
w는 $x^2-x+1=0$의 해이다.
$\therefore\ w^2-w+1=0,\ w^3=-1$
$\therefore\ w^{2006}+\left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$
$=w^2\cdot w^{2004}+\frac{1}{w^2\cdot w^{2004}}$
$=w^2+\left(\frac{1}{w}\right)^2=w^2-w=-1$

32. $f(x) = x^3 - p$, $g(x) = x^3 - 2x$에 대하여 방정식 $f(x) = 0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$의 값을 p로 바르게 나타낸 것은?

① p^3 ② $-p^3 + 2p$ ③ $-3p^3$

④ $3p^3 - 6p$ ⑤ $p^3 - 8p$

해설

$x^3 - p = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면
$\alpha^3 - p = 0$, $\beta^3 - p = 0$, $\gamma^3 - p = 0$
$\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$,
$\alpha\beta\gamma = p$이 성립한다.
이 때,
$g(\alpha)b(\beta)g(\gamma) = (\alpha^3 - 2\alpha)(\beta^3 - 2\beta)(\gamma^3 - 2\gamma) = (p - 2\alpha)(p - 2\beta)(p - 2\gamma)$
$= p^3 - 2(\alpha + \beta + \gamma)p^2 + 4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)p - 8\alpha\beta\gamma = p^3 - 8p$

33. x 에 관한 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+4k+4=0$ 의 두 근이 정수일 때, 정수 k 의 값들의 합을 구하면?

① -1　　② 7　　③ 6　　④ -6　　⑤ 1

해설

두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $(\alpha \geq \beta)$

$\alpha+\beta=-2(k-1)$ ······ ㉠

$\alpha\beta=4k+4$ ······ ㉡

㉠×2+㉡을 하면 $\alpha\beta+2\alpha+2\beta=8$, $(\alpha+2)(\beta+2)=12,\quad \alpha\beta=-10, 0, 2, 42, 32, 30$

그런데 $\alpha,\ \beta$가 정수이므로 ㉡에서

$k=\dfrac{\alpha\beta-4}{4}$

따라서 k의 정수값은 $-1,\ 7$

$\therefore\ k$의 값들의 합은 6