

1. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax - 9 + 2a^2 = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $|\alpha - \beta|$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x^2 + 2ax - 9 + 2a^2 = 0$ 에서

근과 계수와의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2a, \alpha\beta = -9 + 2a^2$$

$$|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-2a)^2 - 4(-9 + 2a^2) = -4a^2 + 36$$

$$\text{그런데 } \frac{D}{4} = a^2 + 9 - 2a^2 \geq 0$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 3$$

$$\therefore 0 \leq |\alpha - \beta|^2 \leq 36$$

$$\text{즉, } 0 \leq |\alpha - \beta| \leq 6$$

$$\therefore (\text{최댓값}) + (\text{최솟값}) = 0 + 6 = 6$$

2. $a^2 = 3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하면?

$$P = \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2$$

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$(2+a)^n = \alpha$, $(2-a)^n = \beta$ 로 놓으면

$$P = \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

$$= 4(2+a)^n(2-a)^n = 4(4-a^2)^n$$

$$= 4(4-3)^n = 4$$

3. $\frac{2005^3 + 1}{2005 \times 2004 + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

2005 = x 로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{x^3 + 1^3}{x(x-1) + 1} \\&= \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} \\&= x + 1 \\&= 2006\end{aligned}$$

4. 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 7$, $x + y = 3$ 일 때, $x^5 + y^5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 123

해설

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \text{에서 } 3^2 = 7 + 2xy, xy = 1$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \text{에서 } x^3 + y^3 = 18$$

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) \\ &= 7 \times 18 - 1^2 \times 3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

5. $x^{113} + 1$ 을 $x^3 + x$ 로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라고 하자. 이때, $R(2006)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2007

해설

$$\begin{aligned}x^{113} + 1 &= (x^3 + x)Q(x) + R(x) \\ &= x(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c\end{aligned}$$

항등식이므로 $x = 0, x^2 = -1$ 을 각각 대입하면,

$$1 = c, \quad x + 1 = -a + bx + c$$

$$\therefore a = 0, \quad b = 1$$

$$\therefore R(x) = x + 1$$

$$\text{따라서 } R(2006) = 2007$$

6. $x^4 - 11x^2 + 1$ 이 $(x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)$ 로 인수분해될 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

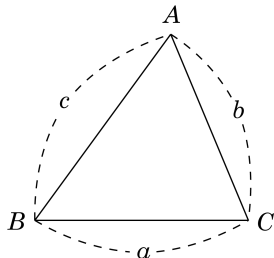
해설

$$\begin{aligned}x^4 - 11x^2 + 1 &= (x^2 - 1)^2 - 9x^2 \\&= (x^2 - 1)^2 - (3x)^2 \\&= (x^2 - 3x - 1)(x^2 + 3x - 1) \\&= (x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)\end{aligned}$$

$$\therefore a = -3, b = -1$$

$$\therefore a + b = -4$$

7. 다음 그림과 같이 세 변의 길이가 a, b, c 인 $\triangle ABC$ 에서 $a^3 + b^3 + c^3 - ab(a+b) + bc(b+c) - ca(c+a) = 0$ 이 성립할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?



- ① $a = b$ 인 이등변삼각형 ② $a = c$ 인 이등변삼각형
 ③ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ④ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형
 ⑤ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned}
 & a^3 + b^3 + c^3 - ab(a+b) + bc(b+c) - ca(c+a) \\
 &= a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 + b^2c + bc^2 - c^2a - ca^2 \\
 &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + b^3 + b^2c + bc^2 + c^3 \\
 &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + b^2(b+c) + c^2(b+c) \\
 &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + (b+c)(b^2+c^2) \\
 &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)(a-b-c) \\
 &= (a-b-c)a^2 - (b^2+c^2)(a-b-c) \\
 &= (a-b-c)(a^2-b^2-c^2) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

이 때, a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a \neq b+c$

$$\therefore a^2 - b^2 - c^2 = 0,$$

$$\text{즉 } a^2 = b^2 + c^2$$

따라서, $\triangle ABC$ 는 a 를 빗변으로 하는 직각삼각형,

즉 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

8. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ 을 이용하여

$\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

9999 = a 라 하면

$$\begin{aligned}\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1} &= \frac{a^3 + 1}{(a - 1)a + 1} \\ &= \frac{(a + 1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} \\ &= a + 1 = 10000\end{aligned}$$

9. 실수 a, b, c 에 대하여 $[a, b, c] = a^2 + bc$ 라 하고 $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ 일 때, $[x, 2y, z] + [y, 2z, x] + [z, 2x, y]$ 의 값은?

① 10

② 22

③ 88

④ 100

⑤ 144

해설

$$\begin{aligned} & [x, 2y, z] + [y, 2z, x] + [z, 2x, y] \\ &= x^2 + 2yz + y^2 + 2zx + z^2 + 2xy \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\ &= (x + y + z)^2 = 100 \end{aligned}$$

10. x 에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2 + (3+2ai)x + (2a+3i) = 0$ 이 실근을 갖기 위한 실수 a 의 값을 구하면?

① 1

② -1

③ 2

④ -2

⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2 + (3+2ai)x + (2a+3i) = 0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$$(ax^2 + 3x + 2a) + (-ax^2 + 2ax + 3)i = 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$ax^2 + 3x + 2a = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$-ax^2 + 2ax + 3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 하면

$$(2a+3)x + (2a+3) = 0, (2a+3)(x+1) = 0$$

$$2a+3 = 0 \text{ 또는 } x+1 = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = -1$$

i) $a = -\frac{3}{2}$ 일 때

$$\textcircled{㉠}\text{식에서 } -\frac{3}{2}x^2 + 3x - 3 = 0, x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\text{이므로 허근을 가진다. } \therefore a \neq -\frac{3}{2}$$

ii) $x = -1$ 일 때 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면,

$$a - 3 + 2a = 0, 3a = 3 \quad \therefore a = 1$$

11. 자연수 n 에 대해 $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x 가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$

② $-2i$

③ 0

④ 2

⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} x &= \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i} \right)^2 \right\}^n + \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i} \right)^2 \right\}^n \\ &= \left(\frac{2}{2i} \right)^n + \left(\frac{2}{-2i} \right)^n \\ &= \left(\frac{1}{i} \right)^n + \left(-\frac{1}{i} \right)^n = (-i)^n + i^n \end{aligned}$$

i^n 은 $n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$, $n = 4k + 3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n = 4k$ 이면 $x = 1 + 1 = 2$

(ii) $n = 4k + 1$ 이면 $x = -i + i = 0$

(iii) $n = 4k + 2$ 이면 $x = -1 - 1 = -2$

(iv) $n = 4k + 3$ 이면 $x = i - i = 0$

$\therefore x = 2, 0, -2$

따라서, x 가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

12. 복소수 z 에 대하여 다음 보기 중 항상 실수인 것을 모두 고르면?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $z \neq 0$ 이다)

㉠ $z + \bar{z}$

㉡ $z\bar{z}$

㉢ $(z - \bar{z})^2$

㉤ $\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}$

㉦ $\frac{\bar{z}}{z}$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤, ㉥, ㉦

해설

$$z = a + bi \text{ 라 하자 } \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$\text{㉠ } z + \bar{z} = 2a$$

$$\text{㉡ } z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

$$\text{㉢ } (z - \bar{z})^2 = (2bi)^2 = -4b^2$$

$$\text{㉤ } \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} - \frac{a + bi}{a^2 + b^2} = \frac{-2bi}{a^2 + b^2}$$

$$\text{㉦ } \frac{\bar{z}}{z} = \frac{(a - bi)^2}{a^2 + b^2}$$

13. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) i$ 의 값은?

① $\frac{y}{2}$

② $-y$

③ $2x$

④ $\frac{-x}{2}$

⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

$$\begin{aligned}\text{그러므로 } \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) i &= \frac{1}{2} (z - \bar{z}) i \\ &= \frac{1}{2} (x + yi - x + yi) i \\ &= \frac{1}{2} (2yi) i = -y\end{aligned}$$

14. $z = \frac{1+i}{1-i}$ 일 때, $1+z+z^2+\cdots+z^{2008}$ 의 값은?

① $-i$

② -1

③ 0

④ i

⑤ 1

해설

$$z = \frac{1+i}{1-i} = i, z^2 = -1, z^3 = -i, z^4 = 1$$

$$(\text{준식}) : 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$$

처음 네 항의 합 :

$$1 + i - 1 - i = 0$$

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$$

$$= 0 + 0 + \cdots + 0 + z^{2008}$$

$$= z^{2008}$$

$$= (z^4)^{502}$$

$$= 1$$

15. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = 0$ 의 한근이 $1 + 2i$ 일 때, 두 실수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

한 근이 $1 + 2i$ 이면 $x = 1 + 2i$, $x^2 = -3 + 4i$, $x^3 = -11 - 2i$, $x^4 = -7 - 24i$,

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15$$

$$= (-7 - 24i) + a(-11 - 2i) + b(-3 + 4i) + 14(1 + 2i) + 15 = 0,$$
$$(-11a - 3b - 7 + 14 + 15) + (-24 - 2a + 4b + 28)i$$

$$\therefore 11a + 3b = 22, -2a + 4b = -4$$

연립하여 풀면 $a = 2, b = 0$

해설

$$x = 1 + 2i \text{에서 } x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + kx + 3)$$

좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면

$$a = k - 2, b = 8 - 2k, 14 = 5k - 6$$

$$\therefore k = 4, a = 2, b = 0$$

16. n 이 자연수일 때, $x^{2n}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x + 2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $4^n(x + 2)$ 가 되도록 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

$$\begin{aligned}(\text{i}) \quad f(x) &= x^{2n}(x^2 + ax + b) \\ &= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)\end{aligned}$$

$$f(-2) = 4^n(4 - 2a + b) = 0$$

$$\therefore b = 2a - 4$$

$$\begin{aligned}(\text{ii}) \quad f(x) &= x^{2n}(x^2 + ax + 2a - 4) \\ &= x^{2n}(x + 2)(x + a - 2) \\ &= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)\end{aligned}$$

$$\therefore x^{2n}(x + a - 2) = (x + 2)Q(x) + 4^n$$

$x = -2$ 를 대입하면

$$4^n(-4 + a) = 4^n, -4 + a = 1$$

$$\therefore a = 5$$

$$b = 2a - 4 \text{ 에서 } b = 6$$

$$\therefore a + b = 11$$

17. 임의의 자연수 k 에 대하여 $x - k$ 로 나눈 나머지가 k 인 다항식 $f(x)$ 의 개수를 구하면?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 무수히 많다.

해설

나머지 정리에 의하여 임의의 자연수 k 에 대하여 $\therefore f(k) = k$
따라서 $g(x) = f(x) - x$ 로 두면 모든 자연수에 대해서 $g(x) = 0$
이 성립

$$\therefore g(x) = 0$$

$$\text{즉, } f(x) = x$$

$\therefore$ 1개

18. x^8 을 $x + \frac{1}{2}$ 으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q\left(-\frac{1}{2}\right)$ 을 구하면?

① $\frac{1}{8}$

② $\frac{1}{16}$

③ $-\frac{1}{8}$

④ $-\frac{1}{16}$

⑤ $-\frac{1}{32}$

해설

$$x^8 = \left(x + \frac{1}{2}\right) Q(x) + R$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ 를 대입하면 } R = \frac{1}{2^8}$$

$$x^8 = \left(x + \frac{1}{2}\right) Q(x) + \frac{1}{2^8}$$

$$x^8 - \frac{1}{2^8} = \left(x + \frac{1}{2}\right) Q(x)$$

$$\left(x^4 + \frac{1}{2^4}\right) \left(x^2 + \frac{1}{2^2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right) Q(x)$$

$$\left(x^4 + \frac{1}{2^4}\right) \left(x^2 + \frac{1}{2^2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) = Q(x)$$

$$\therefore Q\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4}\right) \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{16}$$

19. 다항식 $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2x+1$ 이고, $(x-2)^3$ 으로 나눈 나머지가 x^2-x+6 이다. $f(x)$ 를 $(x+1)(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$

② $3x-2$

③ $3x+2$

④ x^2-2x+1

⑤ x^2-x+6

해설

$$f(x) = (x+1)^2 A(x) + 2x+1 \text{ 에서 } f(-1) = -1$$

$$f(x) = (x-2)^3 B(x) + x^2 - x + 6$$

$$= (x-2)^3 B(x) + (x-2)^2 + 3x+2$$

$$= (x-2)^2 \{(x-2)B(x) + 1\} + 3x+2$$

즉 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 ax^2+bx+c 라 하면

$$f(x) = (x+1)(x-2)^2 Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x+1)(x-2)^2 Q(x) + a(x-2)^2 + 3x+2$$

$$f(-1) = 9a - 1 = -1 \quad \therefore a = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 + 3x+2$$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $3x+2$

20. x 에 대한 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에 대하여 $f(x) + 2$, $xf(x) + 2$ 가 모두 일차식 $x - \alpha$ 로 나누어 떨어질 때, $a + b + c$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) + 2 = 0, \alpha f(\alpha) + 2 = 0$

$$f(\alpha) = -2, \alpha = 1$$

$$\therefore f(1) = -2$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f(1) = 1 + a + b + c = -2$$

$$\therefore a + b + c = -3$$

21. 두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나눈 몫을 Q_1 , 나머지를 R_1 이라 할 때, B 는 R_1 로 나누어 떨어지고 그 몫은 Q_2 이다. 이 때, A, B 의 최소공배수는? (단, A 의 차수가 B 의 차수보다 크다.)

① AB

② $\frac{AB}{R_1}$

③ $\frac{AB}{Q_1}$

④ $\frac{AB}{Q_2}$

⑤ $\frac{AB}{Q_1 Q_2}$

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면

$$A = BQ_1 + R_1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$B = R_1 Q_2 \cdots \textcircled{㉡}$$

유클리드의 호제법에 의하여

A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R_1 의 최대공약수와 같다.

㉠, ㉡에서 B 와 R_1 의 최대공약수는 R_1 이므로

A 와 B 의 최대공약수는 R_1 이다.

따라서, A, B 의 최소공배수는 $\frac{AB}{R_1}$

22. 복소수 z_k (k 는 자연수) 를 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \bar{z}_1 + (1 - i)$, $z_3 = \bar{z}_2 + (1 - i)$, $\dots$ 와 같은 방법으로 정할 때, $\bar{z}_{100}$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$, $\bar{z}$ 은 z 의 켤레복소수)

① $50 + i$

② $50 - i$

③ $100 + 2i$

④ $100 - 2i$

⑤ $200 + 4i$

해설

$$z_1 = 1 + i, z_2 = (1 - i) + (1 - i) = 2 - 2i,$$

$$z_3 = 3 + i, z_4 = 4 - 2i, z_5 = 5 + i \dots\dots$$

$$\Rightarrow z_{2n+1} = (2n + 1) + i, z_{2n} = 2n - 2i$$

$$\therefore \bar{z}_{100} = 100 + 2i$$

23. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2$ 의 값은?

① -4

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1$$

$$\alpha\beta < 0 \text{ 이므로 } \frac{\beta}{\alpha} < 0, \frac{\alpha}{\beta} < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2 &= \frac{\beta}{\alpha} - 2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{\alpha}{\beta} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + 2\left(\because \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta}}\right) \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} + 2 \\ &= -4 \end{aligned}$$

해설

24. 서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여 두 방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$ 과 $x^2 + 2bx + a = 0$ 의 두 근의 차가 서로 같을 때, a, b 의 관계식은?

① $a + b = 0$

② $a - b - 1 = 0$

③ $a - b + 1 = 0$

④ $a + b - 1 = 0$

⑤ $a + b + 1 = 0$

해설

$x^2 + 2ax + b = 0$ 의 해를 α, β

$x^2 + 2bx + a = 0$ 의 해를 γ, δ 라 하면

$|\alpha - \beta| = |\gamma - \delta|$ 에서

$$(\alpha - \beta)^2 = (\gamma - \delta)^2,$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta$$

$$(-2a)^2 - 4b = (-2b)^2 - 4a$$

$$\therefore (a - b)(a + b + 1) = 0$$

$a \neq b$ 이므로 $a + b + 1 = 0$

25. 실계수 이차방정식이 두 허근 α, β 를 갖고 $\alpha^2 + 2\beta = 1$ 일 때, 이 이차방정식은?

① $x^2 + 2x + 3 = 0$

② $x^2 + 4x + 6 = 0$

③ $x^2 - 2x + 3 = 0$

④ $x^2 - 4x + 6 = 0$

⑤ $x^2 - 3x + 2 = 0$

해설

$$\alpha = m + ni, \beta = m - ni$$

(m, n : 실수, $n \neq 0$)라 놓으면

$$\alpha^2 + 2\beta = (m + ni)^2 + 2(m - ni)$$

$$= (m^2 - n^2 + 2m) + 2n(m - 1)i = 1 \text{ 에서}$$

$$n \neq 0 \text{ 이므로 } m = 1, n^2 = 2$$

$$\alpha + \beta = 2m = 2$$

$$\alpha\beta = m^2 + n^2 = 3$$

$\therefore \alpha, \beta$ 를 두 근으로 갖는 이차방정식은

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

26. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - (p+1)x + p+5 = 0$ 의 두근 α, β 가 모두 양의 정수일 때, $\alpha > \beta$ 를 만족하는 순서쌍 (α, β) 의 개수를 구하여라.



답 :

개



정답 : 1 개

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = p + 1, \alpha\beta = p + 5$$

$$\therefore \alpha + \beta - 1 = \alpha\beta - 5$$

$$\therefore (\alpha - 1)(\beta - 1) = 5$$

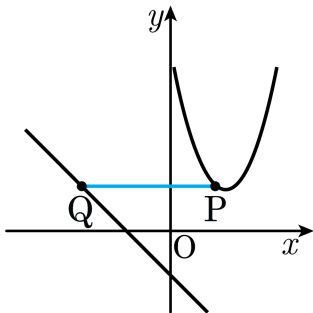
α, β 모두 양의 정수이고, $\alpha > \beta$ 이므로

$$\alpha - 1 = 5, \beta - 1 = 1$$

$$\alpha = 6, \beta = 2$$

$$\therefore (6, 2) \text{ 1 개}$$

27. 다음 그림에서 포물선 $y = x^2 - 5x + 8$ 위의 한 점 P 와 직선 $y = -x - 2$ 위의 한 점 Q 에 대하여 $\overline{PQ}$ 가 x 축에 평행할 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 - 5x + 8$ 에서 점 P 의 좌표는 $P(a, a^2 - 5a + 8)$

$y = -x - 2$ 에서 점 Q 의 좌표는 $Q(b, -b - 2)$

점 P 와 점 Q 의 y 좌표가 같으므로

$$a^2 - 5a + 8 = -b - 2, \quad b = -a^2 + 5a - 10 \text{ 이다.}$$

$$\overline{PQ} = a - b = a^2 - 4a + 10 = (a - 2)^2 + 6$$

$\overline{PQ}$ 의 최솟값은 6 이다.

28. $0 \leq \frac{p}{2} \leq 1$, $2p - q \leq 3$ 를 만족하는 실수 p, q 에 대하여 이차함수 $y = -x^2 + px + q$ ($0 \leq x \leq 1$) 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$$y = -x^2 + px + q = -\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + q + \frac{p^2}{4}$$

이때, $0 \leq \frac{p}{2} \leq 1$ 이고 $0 \leq x \leq 1$ 이므로

최댓값 M 은 $x = \frac{p}{2}$ 일 때이다.

$$\therefore M = q + \frac{p^2}{4}$$

또한 $2p - q \leq 3$ 에서 $q \geq 2p - 3$

$$\therefore M \geq \frac{p^2}{4} + 2p - 3 = \frac{1}{4}(p + 4)^2 - 7$$

따라서 M 의 최솟값은 -7 이다.

29. x, y 가 실수일 때, $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

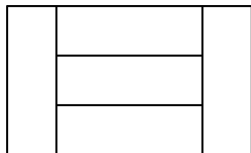
▷ 정답 : -5

해설

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y \\ &= x^2 - 2(y-1)x + 2y^2 + 2y \\ &= \{x - (y-1)\}^2 + (y+2)^2 - 5 \end{aligned}$$

따라서 $x = -3, y = -2$ 일 때, 최솟값 -5

30. 다음 그림에서 직사각형의 변을 제외한 직사각형 내부의 선분의 길이의 총합이 48 이고, 내부의 5 개의 직사각형의 넓이는 모두 같다. 큰 직사각형의 넓이가 최대일 때의 큰 직사각형의 가로의 길이를 y , 세로의 길이를 x 라 할 때, xy 의 값을 구하여라.

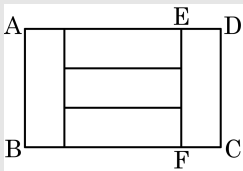


▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

그림에서



$$\square CDEF = \frac{1}{5} \square ABCD \text{ 이므로}$$

$$\overline{DE} = \frac{1}{5}y$$

직사각형 내부 선분의 길이의 합이 48 이므로

$$2x + \frac{6}{5}y = 48 ,$$

$$\therefore y = -\frac{5}{3}x + 40$$

직사각형 ABCD 의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= xy = x \left(-\frac{5}{3}x + 40 \right) \\ &= -\frac{5}{3}(x - 12)^2 + 240 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 12 \text{ 일 때, 큰 직사각형의 넓이가 최대가 되므로 } y = \left(-\frac{5}{3} \right) \times 12 + 40 = 20$$

따라서 $xy = 240$ 이다.

31. $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $w^{2006} + \left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$

의 값은?

①

-1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

짝수차 상반방정식이므로

양변을 x^2 으로 나누면

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) \right\} - 3 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = z$ 로 놓으면

$$z^2 + 2z - 3 = (z + 3)(z - 1) = 0$$

$$\therefore z = -3 \text{ 또는 } z = 1$$

(i) $z = -3$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} = -3 \text{에서 } x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} : \text{실근}$$

(ii) $z = 1$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{에서}$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 해는 허수이므로

w 는 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 해이다.

$$\therefore w^2 - w + 1 = 0, w^3 = -1$$

$$\therefore w^{2006} + \left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$$

$$= w^2 \cdot w^{2004} + \frac{1}{w^2 \cdot w^{2004}}$$

$$= w^2 + \left(\frac{1}{w}\right)^2 = w^2 - w = -1$$

32. $f(x) = x^3 - p$, $g(x) = x^3 - 2x$ 에 대하여 방정식 $f(x) = 0$ 의 세 근을 α , β , γ 라고 할 때, $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$ 의 값을 p 로 바르게 나타낸 것은?

① p^3

② $-p^3 + 2p$

③ $-3p^3$

④ $3p^3 - 6p$

⑤ $p^3 - 8p$

해설

$x^3 - p = 0$ 의 세 근을 α , β , γ 라 하면

$$\alpha^3 - p = 0, \beta^3 - p = 0, \gamma^3 - p = 0$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0,$$

$$\alpha\beta\gamma = p \text{ 이 성립한다.}$$

이 때,

$$g(\alpha)g(\beta)g(\gamma) = (\alpha^3 - 2\alpha)(\beta^3 - 2\beta)(\gamma^3 - 2\gamma) = (p - 2\alpha)(p - 2\beta)(p - 2\gamma)$$

$$= p^3 - 2(\alpha + \beta + \gamma)p^2 + 4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)p - 8\alpha\beta\gamma = p^3 - 8p$$

33. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 4k + 4 = 0$ 의 두 근이 정수일 때, 정수 k 의 값들의 합을 구하면?

① -1

② 7

③ 6

④ -6

⑤ 1

해설

두 근을 α, β 라 하면 ($\alpha \geq \beta$)

$$\alpha + \beta = -2(k-1) \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha\beta = 4k + 4 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} \times 2 + \textcircled{㉡}$ 을 하면 $\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta = 8$, $(\alpha+2)(\beta+2) = 12$, $\alpha\beta = -10, 0, 2, 42, 32, 30$

그런데 α, β 가 정수이므로 $\textcircled{㉡}$ 에서

$$k = \frac{\alpha\beta - 4}{4}$$

따라서 k 의 정수값은 -1, 7

$\therefore k$ 의 값들의 합은 6