

1. 어떤 수 A 를 8 로 나누었더니 몫이 9 이고, 나머지가 3 이었다. 어떤 수 A 는?

① 70

② 75

③ 80

④ 85

⑤ 90

해설

$$A = 8 \times 9 + 3 = 75$$

2. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $8000 = 8 + 10^3$

② $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7 = 5^2 \times 7^3$

③ $2^4 = 2 + 2 + 2 + 2$

④ $4 \times 4 \times 4 = 2^6$

⑤ $\frac{1}{11} \times \frac{1}{11} \times \frac{1}{11} = \frac{3}{11}$

해설

① $8000 = 8 \times 10^3$

③ $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

④ $4 \times 4 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$

⑤ $\frac{1}{11} \times \frac{1}{11} \times \frac{1}{11} = \left(\frac{1}{11}\right)^3$

3. 다음 중 420 의 소인수가 아닌 것은?

① 2

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 11

해설

$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ 이므로 소인수는 2, 3, 5, 7

4. $60 \times 2^3 \times x$ 가 어떤 자연수의 제곱이 될 때, 가장 작은 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$60 \times 2^3 \times x = 2^5 \times 3 \times 5 \times x$ 이므로
가장 작은 x 는 $2 \times 3 \times 5 = 30$

5. 1 부터 50 까지의 자연수 중에서 약수의 개수가 3 개인 자연수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

자연수 n 의 약수의 개수가 3 개이기 위해서는
1 과 n 이외에 약수가 한 개만 더 있어야하므로
자연수 n 은 소수의 완전제곱수이어야 한다.
따라서 1 부터 50 까지의 완전제곱수를 구하면
 $7^2 = 49 < 50$ 이고 $11^2 = 121 > 50$ 이므로
50 이하인 소수의 완전제곱수는
 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2$ 이다.

6. 사과 26 개와 귤 31 개를 될 수 있는 대로 많은 어린이들에게 똑같이 나누어 주려고 했더니 사과는 2 개가 부족하고, 귤은 5 개가 부족했다. 어린이는 모두 몇 명인가?

① 3 명

② 4 명

③ 6 명

④ 8 명

⑤ 12 명

해설

어린이 수는 $26 + 2 = 28$, $31 + 5 = 36$ 의 최대공약수 4 (명)

7. 주영이는 6일에 한 번씩 수영장에 가고 선화는 4일에 한 번씩 수영장에 간다고 한다. 두 사람이 올해 1월 12일에 수영장에서 처음 만났다면 올해 몇 번 더 만날 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : 번

▷ 정답 : 29번

해설

6과 4의 최소공배수가 12 이므로 12일마다 수영장에서 만나게 된다.

$$365 \div 12 = 30 \cdots 5$$

1년에 30번 만나게 되므로 앞으로 29번 더 만날 수 있다.

8. 다음 수들의 최대공약수와 최소공배수를 소수의 거듭제곱을 써서 나타낸 것으로 옳은 것은?

$$2 \times 3^2 \times 5, \quad 2 \times 3 \times 7$$

- ① 최대공약수 : 2×3 , 최소공배수 : $2 \times 3 \times 5 \times 7$
② 최대공약수 : 2×3 , 최소공배수 : $2 \times 3^2 \times 5 \times 7$
③ 최대공약수 : $2 \times 3^2 \times 5$, 최소공배수 : $2 \times 3 \times 5 \times 7$
④ 최대공약수 : $2 \times 3 \times 7$, 최소공배수 : $2 \times 3^2 \times 5 \times 7$
⑤ 최대공약수 : $2 \times 3^2 \times 5 \times 7$, 최소공배수 : 2×3

해설

$$\begin{array}{r} 2 \times 3^2 \times 5 \\ 2 \times 3 \quad \times 7 \\ \hline 2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 630 \end{array}$$

최대공약수 : 2×3

최소공배수 : $2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

9. 두 자연수의 최대공약수가 11, 최소공배수가 42 일 때, 두 수의 곱을 구하면?

① 358

② 409

③ 421

④ 462

⑤ 500

해설

두 수 A, B 의 최대공약수를 G , 최소공배수를 L 이라 하면

$A \times B = L \times G$ 이므로

$A \times B = 11 \times 42$ 이다.

$\therefore A \times B = 462$

10. 두 분수 $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{18}$ 중 어느 것을 곱해도 자연수가 되는 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

구하는 수는 12 와 18 의 최소공배수이므로 36 이다.

11. 연속하는 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c$ 가 15 의 배수가 되는 순서쌍 (a, b, c) 는 모두 몇 개인지 구하여라. (단, $a \leq 100$)

▶ 답: 개

▷ 정답: 20 개

해설

$b = a + 1, c = a + 2$ 이므로,

$$a + (a + 1) + (a + 2) = 15k$$

$\rightarrow 3a = 15k - 3 \rightarrow a = 5k - 1 \rightarrow a$ 는 5 로 나누어서 나머지가 4 인 수이다.

$a \leq 100$ 일 때, a 의 개수는 20 개이다.

$\therefore$ 순서쌍 (a, b, c) 의 개수=20 개

12. 다음 중 3의 배수가 아닌 것은?

① 129

② 672

③ 501

④ 342

⑤ 781

해설

3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이다.

⑤ $7 + 8 + 1 = 16$ 은 3의 배수가 아니므로 781은 3의 배수가 아니다.

13. 다음 중 3의 배수인 것은?

① 124

② 263

③ 772

④ 305

⑤ 273

해설

3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이다.

⑤ $2 + 7 + 3 = 12$ 가 3의 배수이므로 273은 3의 배수이다.

14. 네 자리 수 $68\square 0$ 이 6 의 배수일 때, $\square$ 안에 알맞은 숫자를 모두 구하여라

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 4

▷ 정답 : 7

해설

6 은 2 와 3 의 배수이다.

일의 자리가 0 이므로 2 의 배수이고 3 의 배수이려면 $6+8+\square+0$ 이 3 의 배수이어야 한다.

$\therefore \square = 1, 4, 7$

15. 다음 세 자리 수는 3의 배수이다. 안에 들어갈 알맞은 숫자를 모두 구하여라.

$$2 \square 8$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : 8

해설

각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 하므로

$$2 + \square + 8 = 10 + \square$$

$$\therefore \square = 2, 5, 8$$

16. 다음 중 12 의 배수는?

① 90

② 126

③ 288

④ 352

⑤ 1498

해설

12 의 배수는 4 와 3 의 공배수이다.

17. 18 개의 약수를 갖는 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 180

해설

$18 = 2 \times 3 \times 3$ 이므로

$(1 + 1) \times (2 + 1) \times (2 + 1)$ 에서 $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$

18. 세 수 42, 24, 63 의 최소공배수는?

① $2^2 \times 3^2 \times 5$

② $2^2 \times 3^2 \times 7$

③ $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

④ $2^3 \times 3^2 \times 5^2$

⑤ $2^3 \times 3^2 \times 7$

해설

$42 = 2 \times 3 \times 7$, $24 = 2^3 \times 3$, $63 = 3^2 \times 7$ 이므로 최소공배수는 $2^3 \times 3^2 \times 7$ 이다.

19. 다음 두 수 $2^a \times 3^3 \times 5^2$, $2^2 \times 3^2 \times 5^{a+1}$ 의 최소공배수가 $2^2 \times 3^3 \times 5^{a+1}$ 일 때, 자연수 a 를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

해설

2^a 와 2^2 의 최소공배수가 2^2 이므로 a 는 2 이하의 수가 되어야 한다.

또한 5^2 과 5^{a+1} 의 최소공배수가 5^{a+1} 이므로 $a+1$ 은 2 이상의 수가 되어, a 는 1 이상의 수가 되어야 한다.

따라서 두 조건을 모두 만족시키는 자연수는 1 과 2 이다.

20. 세 자연수의 비가 $3 : 4 : 6$ 이고 최소공배수가 96 일 때, 세 자연수 중 가장 큰 수는?

① 28

② 48

③ 56

④ 70

⑤ 84

해설

세 자연수의 비가 $3 : 4 : 6$ 이므로 세 자연수는 각각 $3 \times a$, $4 \times a$, $6 \times a$ 로 나타낼 수 있다.

또한 최소공배수는 $2^2 \times 3 \times a = 96 = 2^5 \times 3$ 으로 나타낼 수 있으므로 $a = 8$ 이다.

따라서 세 자연수는 각각 $24 = 3 \times 8$, $32 = 4 \times 8$, $48 = 6 \times 8$ 이다.

21. 야구장 관람권 36장과 축구장 관람권 45장, 농구장 관람권 54장을 가능한 많은 사람들에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 이때, 한 명이 받게 되는 관람권은 몇 장인지 구하여라.

▶ 답 : 장

▷ 정답 : 15장

해설

36, 45, 54 의 최대공약수 : 9

$\therefore (36 + 45 + 54) \div 9 = 15(\text{장})$

22. 가로 길이 15, 세로 길이 21, 높이 6인 상자를 x cm인 정육면체로 채우려고 한다. 이 때, 가장 큰 정육면체로 상자를 채우려면 몇 개의 정육면체가 필요한가?

① 40개

② 50개

③ 60개

④ 70개

⑤ 80개

해설

15, 21, 6의 최대공약수를 구하면 3이다.

따라서 필요한 벽돌의 개수는

$$(15 \div 3) \times (21 \div 3) \times (6 \div 3) = 70(\text{개}) \text{이다.}$$

23. 12로 나누어도 15로 나누어도 나머지가 2인 자연수 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 62

해설

12과 15의 최소공배수에 2을 더한다.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 12 \quad 15} \\ \underline{\quad \quad} \\ 4 \quad 5 \end{array}$$

$$3 \times 4 \times 5 = 60$$

$$60 + 2 = 62$$

24. 다음 중에서 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 소수의 약수는 1 과 자기 자신 2 개이다.

② 가장 작은 소수는 2 이다.

③ 모든 소수는 홀수이다.

④ 두 소수의 곱은 소수이다.

⑤ 1 은 소수도 합성수도 아니다.

해설

㉠ 모든 소수는 홀수이다 → 소수 중 2 는 짝수이다.

㉡ 두 소수의 곱은 소수이다 → 두 소수의 곱은 $2 \times 3 = 6$, $3 \times 5 = 15$ 등으로 합성수이다.

25. 196 을 $a^m \times b^n$ 으로 소인수분해하였을 때, $a + b + m + n$ 의 값은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

$$196 = 2^2 \times 7^2$$

따라서 $a = 2, b = 7, m = 2, n = 2$

$$a + b + m + n = 13$$

26. $2 \times n$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{5}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것은?

① 100

② 200

③ 300

④ 400

⑤ 500

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $2 \times n$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2가 두 번 곱해져 있고, $\frac{n}{5}$ 이 제곱이므로 n 은 5가 세 번 곱해져 있다.

$$\therefore n = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$$

27. 45에 어떤 자연수를 곱하여 어떤 수의 제곱이 되게 하려고 한다. 곱해야 할 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$45 = 3^2 \times 5$$

따라서 제곱이 되려면 5를 곱해야 한다.

28. I, M, O 는 $I \times M \times O = 2001$ 을 만족하는 서로 다른 자연수이다. 이 때, $I + M + O$ 의 최댓값은?

① 23

② 55

③ 99

④ 111

⑤ 671

해설

$2001 = 3 \times 23 \times 29$ 이고, 합의 최댓값을 구하므로, I, M, O 는 1, 3, 667 이 된다.

29. 360의 약수의 개수와 $2^3 \times 3^a \times 5^b$ 의 약수의 개수가 같을 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 자연수)

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ 이므로 약수의 개수가 같기 위해서는 $a = 2$, $b = 1$ 또는 $a = 1$, $b = 2$ 이다.

$$\therefore a + b = 3$$

30. $16 \times A$ 의 약수의 개수가 10 개일 때, A 의 값 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

16을 소인수분해하면 $16 = 2^4$ 이다. $A = a^x$ 라고 하면 $16 \times A = 2^4 \times a^x$ 의 약수의 개수는 $(4 + 1) \times (x + 1) = 10$ (개)이므로 $x + 1 = 2$, $x = 1$ 이다.

한편 $a = 2$ 이면 $16 \times A = 2^4 \times 2 = 2^5$ 이므로 약수의 개수는 $5 + 1 = 6$ (개)로 조건을 만족하지 않는다.

따라서 $a \neq 2$ 인 가장 작은 소수이어야 하므로 $a = 3$, $x = 1$ 이다.
따라서 A 의 값은 3이다.

31. $2^7 = a$, $13^b = 169$ 을 만족하는 자연수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값은?

① 120

② 122

③ 124

④ 126

⑤ 128

해설

$2^7 = 128$, $13^2 = 169$ 이므로 $a = 128$, $b = 2$ 이다. 따라서 $a - b = 126$ 이다.

32. 960으로 나누면 나누어 떨어지고, 1과 자기 자신을 포함한 양의 약수의 개수가 105개인 최소의 자연수 n 의 값은?

① 123500

② $2^7 \times 3^2 \times 5^2$

③ 128000

④ $2^6 \times 3^3 \times 5$

⑤ 129600

해설

$N = a^m b^n c^l \dots$ 에서 양의 약수의 개수는 $(m+1)(n+1)(l+1)\dots$ 이고, 약수의 개수가 $105 = 3 \times 5 \times 7$ (개)이므로 m, n, l 의 값은 차례로 2, 4, 6이다. 최소의 자연수를 구해야 하므로, a, b, c 의 값을 작은 소수부터 차례로 대입하고, 지수는 큰 수부터 차례로 대입하면 $N = 2^6 \times 3^4 \times 5^2$ 이고, 이 수는 $960 = 2^6 \times 3 \times 5$ 의 배수이므로 129600이 답이 된다.

33. 다음 중 옳지 않은 것은?

① 3 은 소수이다.

② 1 과 그 수 자신만의 약수를 가지는 자연수를 소수라 한다.

③ 가장 작은 소수는 1 이다.

④ 2 의 배수 중 소수는 1 개이다.

⑤ 소수는 약수가 2 개이다.

해설

가장 작은 소수는 2이다.

34. $2^3 \times 3^2 \times 5$ 에 어떤 자연수를 곱하여 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 곱할 수 있는 수 중에서 가장 작은 자연수는?

① 3

② 5

③ 3×5

④ 5^2

⑤ 10

해설

$$2^3 \times 3^2 \times 5$$

곱해야할 가장 작은 자연수는

$$2 \times 5 = 10$$

35. $240 \times a = b^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 a, b 에 대하여 $b - a$ 의 값은?

① 45

② 60

③ 75

④ 90

⑤ 105

해설

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5 \text{ 이므로 } a = 3 \times 5$$

$$2^4 \times 3 \times 5 \times (3 \times 5) = 2^4 \times 3^2 \times 5^2, b = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$a = 15, b = 60$$

$$\therefore b - a = 45$$

36. 72 의 소인수를 모두 구하면?

① 8, 9

② 2, 3

③ $2^3, 3^2$

④ 11, 51

⑤ 2, 36

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$ 이므로 소인수는 2 와 3 이다.

$\therefore 2, 3$

37. 다음 중 약수의 개수가 다른 것은?

① 2^{11}

② $3^5 \times 7$

③ 84

④ 132

⑤ 180

해설

① $11 + 1 = 12$ (개)

② $(5 + 1) \times (1 + 1) = 12$ (개)

③ $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ 이므로

$(2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 12$ (개)

④ $132 = 2^2 \times 3 \times 11$ 이므로

$(2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 12$ (개)

⑤ $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ 이므로

$(2 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 18$ (개)

38. 자연수 $A = 2^2 \times 3^n$ 의 약수의 개수가 24 일 때, n 의 값을 구하면?

① 2

② 5

③ 7

④ 8

⑤ 12

해설

$$(2 + 1)(n + 1) = 24$$

$$n + 1 = 8$$

$$\therefore n = 7$$

39. $2^2 \times \square$ 는 약수의 개수가 12 개인 자연수이다. 다음 중 $\square$ 안에 알맞은 수 중 가장 작은 자연수는?

① 4

② 8

③ 15

④ 30

⑤ 32

해설

$12 = (2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1)$ 이므로

$\square = a \times b$ (a, b 는 소수),

$a \neq 2, b \neq 2$ 이므로 가장 작은 소수는 3×5 ,

$\therefore \square = 15$

40. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 10 이하의 소수는 모두 4 개이다.
- ② 17 은 소수이다.
- ③ 1 을 제외한 모든 홀수는 소수이다.
- ④ 2 는 소수이다.
- ⑤ 소수의 약수는 2 개이다.

해설

소수는 1 보다 큰 자연수 중에서 1 과 자기 자신만을 약수로 가지는 수이다. 따라서 9 는 홀수이지만 소수가 아니다.

41. 다음 세 수의 공약수의 개수를 구하면?

$$2^3 \times 3^2 \times 5, \quad 2^2 \times 3^3 \times 7, \quad 2^3 \times 3^2$$

① 4 개

② 6 개

③ 8 개

④ 9 개

⑤ 10 개

해설

세 수의 최대공약수는 $2^2 \times 3^2$ 이고
공약수는 최대공약수의 약수이다.

따라서 $2^2 \times 3^2$ 의 약수의 개수가 $(2+1) \times (2+1) = 9$ (개) 이므로
공약수의 개수는 9 개이다.

42. 서로 맞물려 도는 두 톱니바퀴 A, B 가 있다. A 의 톱니바퀴의 수는 36 개, B 의 톱니의 수는 48 개일 때, 두 톱니바퀴가 같은 톱니에서 처음으로 다시 맞물리는 것은 A 가 몇 바퀴 돈 후인가?

① 4 바퀴

② 5 바퀴

③ 6 바퀴

④ 7 바퀴

⑤ 8 바퀴

해설

$$36 = 2^2 \times 3^2, 48 = 2^4 \times 3 \text{ 의}$$

최소공배수는 $2^4 \times 3^2 = 144$ 이다.

$$\therefore A \text{ 가 돈 회수는 } \frac{144}{36} = 4(\text{바퀴}) \text{ 이다.}$$

43. 자연수 240 과 $2^3 \times 5^n$ 의 약수의 개수가 같을 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$ 이므로

약수의 개수는 $(4 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 20$

$2^3 \times 5^n$ 의 약수의 개수는 $(3 + 1) \times (n + 1) = 20$

$\therefore n = 4$

44. 세 자연수의 비가 $3 : 6 : 10$ 이고 최소공배수가 360 일 때, 나눗셈을 이용하여 세 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

▷ 정답 : 72

▷ 정답 : 120

해설

세 자연수의 비가 $3 : 6 : 10$ 이므로 원래의 세 자연수를 $3 \times a, 6 \times a, 10 \times a$ 라고 하면

$$\begin{array}{r}
 a) \overline{3 \times a \quad 6 \times a \quad 10 \times a} \\
 2) \overline{3 \quad 6 \quad 10} \\
 3) \overline{3 \quad 3 \quad 5} \\
 \quad 1 \quad 1 \quad 5
 \end{array}$$

최소공배수는 $a \times 2 \times 3 \times 5 = 30 \times a$ 이다.

세 수의 최소공배수가 360 이므로 $30 \times a = 360$ 이고, a 는 12 이다.

따라서 세 자연수는 $3 \times 12 = 36, 6 \times 12 = 72, 10 \times 12 = 120$ 이다.

45. 다음 보기 중 옳지 않은 것을 골라라.

보기

- ㉠ 합성수는 모두 짝수이다.
- ㉡ 3의 배수 중 소수는 1개뿐이다.
- ㉢ 2는 가장 작은 소수이다.
- ㉣ 짝수인 소수는 2뿐이다.

▶ 답:

▶ 정답: ㉠

해설

㉠ 15는 합성수이지만 홀수이다.

46. 18 에 적당한 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때 곱해야 할 자연수를 가장 작은 것부터 3 개를 써라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 8

▷ 정답 : 18

해설

$$18 = 2 \times 3^2$$

곱해야 할 자연수를 x 라 할 때,

$$(2 \times 3^2) \times x = y^2$$

$$x = 2, 2 \times 2^2, 2 \times 3^2, \dots$$

$$= 2, 8, 18, \dots$$

47. 자연수 a, b 에 대하여 $2^2 \times 5 \times a = b^2$ 을 만족하는 b 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$2^2 \times 5 \times a = b^2$ 을 만족하려면 $2^2 \times 5 \times a$ 를 소인수분해했을 때 각 소인수의 지수가 짝수여야 한다. 따라서 만족하는 자연수 b 의 최솟값은 $a = 5$ 일 때 $2 \times 5 = 10$ 이다.

48. 두 수 $2^4 \times 5^3$, $2^a \times 3^2 \times 5^b$ 의 최대공약수가 50 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

최대공약수가 $50 = 2 \times 5^2$ 이고

$2^4 \times 5^3$ 에서 2 의 지수가 4 이므로

$2^a \times 3^2 \times 5^b$ 에서 2 의 지수가 1 이어야 한다.

같은 방식으로

$2^4 \times 5^3$ 에서 5 의 지수가 3 이므로

$2^a \times 3^2 \times 5^b$ 에서 5 의 지수가 2 이어야 한다.

따라서 $a = 1$, $b = 2$

49. 세 자연수 $5 \times a$, $7 \times a$, $3 \times a$ 의 최소공배수가 420 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{array}{r} a \overline{) 5 \times a \quad 7 \times a \quad 3 \times a} \\ \underline{ 5 } \\ 7 \\ \underline{ 7 } \\ 3 \\ \underline{ 3 } \\ \end{array}$$

$$a \times 5 \times 7 \times 3 = 420$$

$$\therefore a = 4$$

50. 가로 길이, 세로 길이, 높이가 각각 42 cm, 70 cm, 84 cm 인 직육면체 모양의 상자를 크기가 같은 정육면체로 빈틈없이 채우려고 한다. 가능한 한 큰 정육면체의 한 모서리의 길이를 구하여라.

▶ 답: cm

▷ 정답: 14cm

해설

정육면체가 가능한 한 커야하고, 상자의 빈틈이 없도록 채워야 하므로, 주어진 세 모서리의 최대공약수를 구해야 한다.

따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는

$$42 = 2 \times 3 \times 7, 70 = 2 \times 5 \times 7, 84 = 2^2 \times 3 \times 7 \text{ 의 최대공약수 } 2 \times 7 = 14 \text{ (cm)}$$

51. 두 수 $2^2 \times 3^3 \times 5^2$, $2 \times 3^4 \times 7$ 의 최소공배수를 구하면, $2^A \times 3^B \times 5^C \times 7^D$ 이다.

$A + B + C + D$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

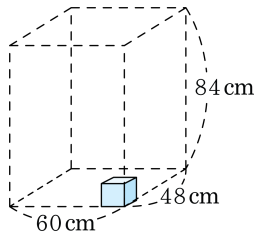
$2^2 \times 3^3 \times 5^2$ 와 $2 \times 3^4 \times 7$ 의 최소공배수는

$2^2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$ 이므로

$A = 2$, $B = 4$, $C = 2$, $D = 1$ 이고,

$A + B + C + D = 9$ 이다.

52. 같은 크기의 정육면체 블록을 빈틈없이 쌓아서 가로의 길이 60 cm, 세로의 길이 48 cm, 높이 84 cm 인 직육면체가 되도록 하려 한다. 되도록 큰 정육면체 블록으로 쌓을 때, 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라.



▶ 답 : cm

▷ 정답 : 12 cm

해설

쌓으려고 하는 정육면체의 한 변의 길이는 60, 48, 84 의 공약수이다.

그런데 되도록 큰 정육면체로 쌓는다고 했으므로 한 변의 길이는 60, 48, 84 의 최대공약수이다.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 48 \quad 60 \quad 84} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 24 \quad 30 \quad 42} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 12 \quad 15 \quad 21} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \quad 5 \quad 7 \end{array}$$

$$\therefore 2 \times 2 \times 3 = 12(\text{cm})$$

53. 어떤 자연수로 200 을 나누면 8 이 남고 100 을 나누면 4 가 남는다고 한다. 이러한 자연수 중에서 가장 큰 것을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 96

해설

구하는 수를 a 라 하면

a 는 $200 - 8 = 192$, $100 - 4 = 96$ 의

최대공약수이므로 $2^5 \times 3 = 96 \therefore 96$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 192 \quad 96} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) \quad 96 \quad 48} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) \quad 48 \quad 24} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) \quad 24 \quad 12} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) \quad 12 \quad 6} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) \quad 6 \quad 3} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \end{array}$$

54. 가로, 세로, 높이가 각각 12 cm, 8 cm, 6 cm 인 직육면체 모양의 벽돌을 빈틈없이 쌓아서 가장 작은 정육면체를 만들려고 한다. 필요한 벽돌은 몇 장인지 구하여라.

▶ 답 : 장

▷ 정답 : 24장

해설

정육면체의 한 변의 길이는 12, 8, 6 의 공배수이어야 하고, 가장 작은 정육면체를 만들려면 한 변의 길이는 12, 8, 6 의 최소공배수이어야 한다.

따라서 정육면체의 한 변의 길이는 24cm 이고 가로는 $24 \div 12 = 2$ (장), 세로는 $24 \div 8 = 3$ (장), 높이는 $24 \div 6 = 4$ (장) 이 필요하므로 구하는 벽돌의 수는 $2 \times 3 \times 4 = 24$ (장) 이다.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 12 \quad 8 \quad 6} \\ 2 \overline{) 6 \quad 4 \quad 3} \\ 3 \overline{) 3 \quad 2 \quad 3} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \end{array}$$

55. 어떤 수가 있다. 그 수를 3 으로 나누면 2 가 남고, 4 로 나누면 3 이 남고, 5 로 나누면 4 가 남는다고 할 때, 그 중 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 59

해설

구하는 수는 (3, 4, 5 의 공배수)-1 인 수 중 가장 작은 수이다.
3, 4, 5 의 최소공배수는 60 이므로 가장 작은 수는 $60 - 1 = 59$ 이다.

56. 세 자연수 7, 8, 9 중 어느 것으로 나누어도 나머지가 2 인 세 자리 자연수 중에서 가장 작은 수는?

① 498

② 500

③ 502

④ 504

⑤ 506

해설

7, 8, 9 의 최소공배수는 504 이므로 구하는 수는 $504 + 2 = 506$ 이다.

57. 100 과 서로소인 두 자리 자연수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 36 개

▷ 정답: 36 개

해설

$$100 = 2^2 \times 5^2$$

→ 100 과 서로소인 수는 2 의 배수가 아니고, 5 의 배수가 아니어야 한다.

두 자리 자연수의 개수는 90 개이고,

두 자리 자연수 중 2 의 배수는 45 개이고,

두 자리 자연수 중 5 의 배수는 18 개이고,

두 자리 자연수 중 10 의 배수는 9 개이다.

$$100 \text{ 과 서로소인 두 자리 자연수의 개수} = 90 - 45 - 18 + 9 = 36$$

58. 432를 자연수 x 로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다.
다음 중 x 의 값으로 알맞지 않은 것은?

① 3

② 6

③ 12

④ 27

⑤ 48

해설

$$\frac{432}{x} = \square^2$$

$$432 = 2^4 \times 3^3$$

나뉘야 할 가장 작은 자연수는 3이다. 그러므로 3 또는 $3 \times$ (지수가 짝수인 수)의 꼴이 아닌 것을 찾는다.

① 3

② 2×3

③ $2^2 \times 3$

④ 3^3

⑤ $2^4 \times 3$

59. $360 \times a = b^2$ 을 만족시키는 자연수 a, b 중에서 가장 작은 수를 각각 x, y 라고 할 때 $x + y$ 의 값으로 알맞은 것은?

① 70

② 80

③ 90

④ 100

⑤ 110

해설

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

지수가 2의 배수이어야 하므로 $x = 2 \times 5$ 이다.

$$(2^2 \times 3 \times 5)^2 = 60^2, x = 10, y = 60$$

따라서 $x + y = 70$ 이다.

60. 자연수 a 의 약수의 개수를 $N(a)$ 로 나타낼 때 $N(600) \times N(a) = 96$ 인 자연수 a 중에서 가장 작은 수를 구하면?

① 4

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 12

해설

$$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \text{ 이므로 } N(600) = 4 \times 2 \times 3 = 24$$

$$24 \times N(a) = 96 \quad \therefore N(a) = 4$$

약수의 개수가 4 개인 가장 작은 자연수는

$$6 = 2 \times 3 \text{ 이다.}$$

61. $2^3 \times 3^5 \times 5$ 와 $2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$ 의 공약수 중에서 어떤 자연수의 제곱이 되는 것은 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 6 개

해설

주어진 두 수의 최대공약수는 $2^3 \times 3^4 \times 5$ 이므로
이 수의 약수 중 제곱이 되는 수를 찾는다.

$1^2, 2^2, 3^2, 3^4, 2^2 \times 3^2, 2^2 \times 3^4$ 모두 6 개이다.

62. 세 자연수의 비가 $3 : 5 : 9$ 이고, 최소공배수가 810 일 때, 세 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 54

▷ 정답 : 90

▷ 정답 : 162

해설

세 자연수를 $3 \times x$, $5 \times x$, $9 \times x$ 라 하면

$$\begin{array}{r} x) \overline{3 \times x \quad 5 \times x \quad 9 \times x} \\ 3) \overline{3 \quad 5 \quad 9} \\ \quad 1 \quad 5 \quad 3 \end{array}$$

$$x \times 3 \times 5 \times 3 = 810, \quad x = 18$$

따라서 세 자연수는 54, 90, 162 이다.

63. 어떤 교차로의 신호등 A는 10초 동안 켜져 있다가 2초 동안 꺼지고, 신호등 B는 12초 동안 켜져 있다가 3초 동안 꺼지며, 신호등 C는 14초 동안 켜져 있다가 4초 동안 꺼진다. 이 세 신호등이 동시에 켜진 후 다시 처음으로 동시에 켜지기까지는 몇 초가 걸리겠는가?

① 90 초

② 180 초

③ 210 초

④ 360 초

⑤ 420 초

해설

10 + 2, 12 + 3, 14 + 4의 최소공배수는 180이므로
180초 후에 다시 처음으로 동시에 켜진다.

64. $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10 = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7$ 이 된다. 이 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10 \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times (2 \times 2) \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (2 \times 5) \\ &= 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \text{ 이므로} \\ &a + b + c = 8 + 4 + 2 = 14 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

65. 1 부터 100 까지의 자연수 중에서 72 과 공약수가 1 개인 수는 몇 개인가?

① 30 개

② 31 개

③ 32 개

④ 33 개

⑤ 34 개

해설

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

72 와 공약수가 1 개인 수는 2 의 배수도 아니고 3 의 배수도 아닌 수이므로

$$100 - (2\text{의 배수의 개수}) - (3\text{의 배수의 개수}) + (6\text{의 배수의 개수}) = 100 - 50 - 33 + 16 = 33$$

66. 504 를 자연수 a 로 나눈 값이 자연수 b 의 제곱이 될 때, $a + b$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

$$\frac{504}{a} = \frac{2^3 \times 3^2 \times 7}{a} = b^2 \text{ 이므로}$$

$a = 2 \times 7, 2^3 \times 7, 2 \times 3^2 \times 7, 504$ 가 가능하다.

$$a = 2 \times 7 \text{ 일 때, } b^2 = 6^2 \quad \therefore b = 6$$

$$a = 2^3 \times 7 \text{ 일 때, } b^2 = 3^2 \quad \therefore b = 3$$

$$a = 2 \times 3^2 \times 7 \text{ 일 때, } b^2 = 2^2 \quad \therefore b = 2$$

$$a = 504 \text{ 일 때, } b = 1$$

$$\therefore (a + b \text{의 최소값}) = 14 + 6 = 20$$

67. 어떤 분수를 두 분수 $\frac{21}{8}$ 과 $\frac{35}{12}$ 에 각각 곱하였더니 그 결과가 모두 자연수가 되었다. 곱한 수 중에서 가장 작은 분수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{24}{7}$

해설

곱하는 분수를 $\frac{b}{a}$ 라고 하자

$$\frac{21}{8} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \quad \begin{cases} b \text{는 } 8 \text{의 배수} \\ a \text{는 } 21 \text{의 약수} \end{cases}$$

$$\frac{35}{12} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \quad \begin{cases} b \text{는 } 12 \text{의 배수} \\ a \text{는 } 35 \text{의 약수} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{(8, 12 \text{의 공배수})}{(21, 35 \text{의 공약수})} \dots \text{㉠ 이다.}$$

㉠을 만족하는 가장 작은 분수는

$$\frac{b}{a} = \frac{(8, 12 \text{의 최소공배수})}{(21, 35 \text{의 최대공약수})} \dots \text{㉡ 이다.}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{24}{7}$$

68. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① 정수는 음의 정수, 0, 양의 정수로 이루어져 있다.
- ② 제일 큰 음의 정수는 -1 이다.
- ③ 절댓값이 가장 작은 정수는 0 이다.
- ④ 수직선에 나타낼 수 없는 유리수도 있다.
- ⑤ 두 정수 사이에는 무수히 많은 유리수가 존재한다.

해설

- ④ 모든 유리수는 수직선에 나타낼 수 있다.

69. 다음 보기를 보고 옳지 않은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ -4.3 ㉡ 9 ㉢ $+\frac{2}{7}$ ㉣ $-\frac{18}{3}$ ㉤ 0
㉥ -2

- ① 정수는 모두 4 개이다.
② 유리수는 모두 4 개이다.
③ 양수는 모두 2 개이다.
④ 음수는 모두 3 개이다.
⑤ 정수가 아닌 유리수는 3 개이다.

해설

- ① 정수는 $9, -\frac{18}{3}, 0, -2$ 의 4 개이다.
② 유리수는 $-4.3, 9, +\frac{2}{7}, -\frac{18}{3}, 0, -2$ 의 6 개이다.
③ 양수는 $9, +\frac{2}{7}$ 의 2 개이다.
④ 음수는 $-4.3, -\frac{18}{3}, -2$ 의 3 개이다.
⑤ 정수가 아닌 유리수는 $-4.3, +\frac{2}{7}$ 의 2 개이다.

70. 다음 중 옳은 것을 골라라.

- ㉠ 절댓값이 가장 작은 수는 0이다.
- ㉡ 모든 정수의 절댓값은 항상 양수이다.
- ㉢ 음의 정수는 그 절댓값이 큰 수가 크다.
- ㉣ $+5$ 의 절댓값은 -7 의 절댓값보다 크다.
- ㉤ 절댓값이 2인 수는 $+2$ 뿐이다.

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉠

해설

- ㉠ 절댓값이 가장 작은 수는 0이다.
- ㉡ 정수의 절댓값은 양수 또는 0이다.
- ㉢ 음의 정수는 그 절댓값이 큰 수가 작다.
- ㉣ $+5$ 의 절댓값은 5이고, -7 의 절댓값은 7이므로 -7 의 절댓값이 크다.
- ㉤ 절댓값이 2인 수는 $+2, -2$ 이다.

71. 수직선 위에서 -10 에 대응하는 점과 $+4$ 에 대응하는 점에서 같은 거리에 있는 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

-10 과 $+4$ 사이의 거리 : 14 이므로

같은 거리는 $\frac{14}{2} = 7$

$\therefore -10$ 에서 오른쪽으로 7 만큼 간 수는 -3

72. 컴퓨터 프로그래밍에서는 어떤 수에 대하여 그 수를 넘지 않는 가장 큰 정수가 필요할 때가 종종 있다. 예를 들어, 1.5 를 넘지 않는 가장 큰 정수는 1 이므로 이것을 $[1.5] = 1$ 로 나타낸다. 이때, $[-3.5] + \left[-\frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{22}{3}\right] - [-5.37] \div \left[\frac{9}{4}\right]$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$$[-3.5] = -4, \left[-\frac{1}{2}\right] = -1, \left[\frac{22}{3}\right] = 7,$$

$$[-5.37] = -6, \left[\frac{9}{4}\right] = 2 \text{ 이므로,}$$

$$(\text{준식}) = -4 + (-1) \times 7 - (-6) \div 2 = -8$$

73. 수직선 위에서 $+\frac{25}{4}$ 에 가장 가까운 정수를 a , $-\frac{16}{5}$ 보다 크지 않은 수 중 가장 큰 정수를 b 라 할 때, $a - b$ 의 값은?

- ① 13 ② $\frac{41}{4}$ ③ $\frac{21}{2}$ ④ 10 ⑤ 5

해설

$$+\frac{25}{4} = +6.25 \text{ 이므로 가장 가까운 정수 } a = +6$$

$$-\frac{16}{5} = -3.2 \text{ 보다 크지 않은 수 중 가장 큰 정수 } b = -4$$

$$\therefore a - b = (+6) - (-4) = 10$$

74. 세 정수 a, b, c 가 다음을 만족할 때, a, b, c 의 부호를 바르게 정하여라.

$$a \times b < 0, \quad a > b, \quad \frac{a}{c} < 0$$

▶ 답 : 0

▶ 답 : 0

▶ 답 : 0

▷ 정답 : $a > \underline{0}$

▷ 정답 : $b < \underline{0}$

▷ 정답 : $c < \underline{0}$

해설

$a \times b < 0$ 이므로 a 와 b 는 부호가 서로 다르고,
 $a > b$ 이므로 $a > 0, b < 0$ 이다.

$\frac{a}{c} < 0$ 이므로 a 와 c 의 부호가 서로 다르다.

$\therefore a > 0, b < 0, c < 0$

75. $-1 < a < 0$ 일 때, 다음 중 가장 작은 값은 어느 것인가?

① $-\frac{1}{a}$

② $-a$

③ a^2

④ a

⑤ $\frac{1}{a}$

해설

$a = -\frac{1}{2}$ 을 대입해본다.

① 2

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $-\frac{1}{2}$

⑤ -2

76. 두 정수 a, b 에 대하여 $|a| = 3$, $|b - a| = 5$ 를 만족하는 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4 개

해설

$|a| = 3$ 이므로, $a = -3, 3$

1) $a = 3$ 이면

$|b - a| = 5$ 이므로 $b = 8, -2$ 이다.

2) $a = -3$ 이면

$|b - a| = 5$ 이므로 $b = 2, -8$ 이다.

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 4 개이다.