1. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(x+1)(y+1)(z+1)$
$=xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$
$=7$

2. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x-y-z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+2x+2y+1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$= x^6 - y^6$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$

$= x^3 + y^3 - 3xy - 1$

3. 다항식 x^3+ax-8 을 x^2+4x+b로 나눈 나머지가 $3x+4$이다. 상수 a, b의 값을 구하면?

① $a=-10,\ b=3$
② $a=10,\ b=3$
③ $a=-10,\ b=-3$
④ $a=7,\ b=3$
⑤ $a=-5,\ b=4$

해설

몫을 $x+c$라고 둔다면
$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+c)+3x+4$
이차항의 계수 : $c+4=0$에서 $c=-4$
상수항 : $bc+4=-8$에서 $b=3$
일차항의 계수 : $4c+b+3=a$에서 $a=-10$

4. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값은?

① 4　② $\frac{13}{3}$　③ $\frac{14}{3}$　④ 5　⑤ $\frac{16}{3}$

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1, x=2$를 각각 대입하면
$x=-1$일 때,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$①
$x=2$일 때, $(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$②
①, ②를 연립하면
$m=\frac{2}{3},\ n=-\frac{13}{3}$
$\therefore\ m-n=5$

5. x^5+x+1을 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^5+x+1=(x+1)Q(x)+R$

$x=-1$을 양변에 대입하면 $R=-1$

$\therefore\ x^5+x+1=(x+1)Q(x)-1 \cdots$ ㉠

$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $Q(1)$

㉠에 $x=1$을 대입하면 $3=2Q(1)-1$

$\therefore\ Q(1)=2$

6. 다음 중 인수분해가 <u>잘못된</u> 것을 고르면?

① $(x-y)^2-xy(y-x)=(x-y)(x-y+xy)$

② $3a^2-27b^2=3(a+3b)(a-3b)$

③ $64a^3-125=(4a+5)(16a^2-20a+25)$

④ $(x^2-x)(x^2-x+1)-6=(x^2-x+3)(x+1)(x-2)$

⑤ $2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$

해설

$$64a^3-125$$
$$=(4a)^3-(5)^3$$
$$=(4a-5)\left(16a^2+20a+25\right)$$

7. 다음 중 $(x+y)^3-8y^3$ 의 인수인 것은?

① $x^2-2xy-4y^2$ ② $x^2-2xy+4y^2$ ③ $x^2+2xy+4y^2$

④ $x^2-4xy-7y^2$ ⑤ $x^2+4xy+7y^2$

해설

(준식)$=(x+y)^3-(2y)^3$

$=\{(x+y)-2y\}\{(x+y)^2+(x+y)2y+(2y)^2\}$

$=(x-y)(x^2+2xy+y^2+2xy+2y^2+4y^2)$

$=(x-y)(x^2+4xy+7y^2)$

8. 다음 중 다항식 $x^4 - 8x^2 - 9$의 인수가 아닌 것은?

① $x - 3$ ② $x + 3$

③ $x^2 + 1$ ④ $x^2 + 9$

⑤ $x^3 + 3x^2 + x + 3$

해설

준 식을 인수분해 하면

$$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 + 1)(x^2 - 9)$$
$$= (x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$$

⑤ $x^2(x + 3) + x + 3 = (x^2 + 1)(x + 3)$

9. 두 다항식 A, B의 최대공약수를 $A\bigstar B$라 할 때 $\dfrac{AB\bigstar B^2}{A\bigstar B}$를 간단히 하면?

① A　② B　③ AB　④ A^2　⑤ B^2

해설

$A\bigstar B = G$라 하면, $A = aG, B = bG$이고, a, b는 서로소이다.

$$\frac{AB\bigstar B^2}{A\bigstar B} = \frac{abG^2\bigstar b^2G^2}{G} = \frac{bG^2}{G} = bG = B$$

10. 복소수 $x = a+bi$(a, b는 실수)가 $x^2 = 3+4i$, $x^3 = 2+11i$ 를 만족할 때 $a+b$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} x^3 &= x^2 \times x \\ &= (3+4i)(a+bi) \\ &= (3a-4b)+(4a+3b)i \end{aligned}$$

$(3a-4b)+(4a+3b)i = 2+11i$

$3a-4b = 2, 4a+3b = 11$

$\therefore a = 2, b = 1$ 이므로 $a+b = 3$

해설

$x = \dfrac{x^3}{x^2} = a+bi$

$$\begin{aligned} \frac{2+11i}{3+4i} &= \frac{(2+11i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} \\ &= \frac{50+25i}{25} \\ &= 2+i \end{aligned}$$

$\therefore a = 2, b = 1$

11. $a = 1 + i$, $b = 1 - i$ 일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{ab} + \left(\frac{1}{b}\right)^2$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$a^2 = (1+i)^2 = 2i,\ b^2 = (1-i)^2 = -2i$,

$ab = (1+i)(1-i) = 2$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{ab} + \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2b^2} = \frac{-2i + 2 + 2i}{4} = \frac{1}{2}$$

12. $\alpha,\ \beta$ 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\alpha},\ \overline{\beta}$ 는 각각 $\alpha,\ \beta$ 의 켤레복소수이고 $i=\sqrt{-1}$)

㉠ $\alpha=\overline{\beta}$ 이면, $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ 는 모두 실수이다. ㉡ $\alpha=\overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 이다. ㉢ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다. ㉣ $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.

① ㉡,㉢ ② ㉠,㉡,㉢ ③ ㉠,㉡,㉣

④ ㉠,㉡ ⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣

해설

$\alpha=a+bi,\ \beta=a-bi\ (a,\ b$ 는 실수$)$

㉠ $\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=a^2+b^2$

㉡ $\alpha\beta=0$, $a^2+b^2=0$, $a=0,\ b=0$

㉢ (반례) $\alpha=1,\ \beta=i$

㉣ (반례) $\alpha=1,\ \beta=i$

13. 이차함수 $y=2x^2+kx-k$ 의 그래프가 x축과 만나도록 하는 상수 k 의 값이 아닌 것은?

① -8 ② -1 ③ 0 ④ 5 ⑤ 8

해설

이차방정식 $2x^2+kx-k=0$ 에서 $D=k^2-4\cdot2\cdot(-k)\geq0$ 이어야 하므로

$k^2+8k\geq0,\ k(k+8)\geq0$

$\therefore k\leq-8$ 또는 $k\geq0$

따라서 위의 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은 ②이다.

14. $y=0$, $y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 2개일 때, 정수 k의 최댓값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
이 때, 방정식 $(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1=0$은 이차방정식이어야 하므로 $k-2\neq 0$
$\therefore k\neq 2 \cdots\cdots$ ㉠
또, 이차방정식의 판별식을 D 라하면 $D>0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=\{3(k-1)\}^2-(k-2)(9k+1)>0$$

$$9\left(k^2-2k+1\right)-\left(9k^2-17k-2\right)>0$$

$$-k+11>0$$

$\therefore k<11 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $k<11,\ k\neq 2$
따라서, 정수 k의 최댓값은 10이다.

15. 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+kx-11$ 의 그래프에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가하는 x 값의 범위가 $x<-5$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

주어진 조건에서 그래프의 축의 방정식은 $x=-5$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x^2+kx-11 \\ &= -\frac{1}{2}(x+5)^2+\frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}x^2-5x-11 \end{aligned}$$

$\therefore\ k=-5$

16. 함수 $f(x)=(x^2-2x+2)(x^2-2x+3)+3x^2-6x$ 의 최솟값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$x^2-2x+2=t$ 로 놓으면

$t=(x-1)^2+1\geq 1$ 이고

$$\begin{aligned} f(x)=g(t)&=t(t+1)+3t-6 \\ &=t^2+4t-6 \\ &=(t+2)^2-10\ (t\geq 1) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은

$g(1)=(1+2)^2-10=-1$

17. 삼차방정식 $x^3-7x^2+9x+9=0$의 근 중에서 무리수인 두 근을 $a,\ b$라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -6 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

해설

방정식을 인수분해하면 $x^3-7x^2+9x+9=0$

$(x-3)(x^2-4x-3)=0$

$x^2-4x-3=0$의 두 근이 $a,\ b(\because$무리수$)$

$a+b=4$

18. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$ 을 풀면?

① $x=-2$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}$

② $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-5$

③ $x=-2\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{6}$

④ $x=-3\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{6}i$

⑤ $x=-1$ 또는 $x=-5$ 또는 $-3\pm\sqrt{6}$

해설

$x(x+6)=x^2+6x$

$(x+2)(x+4)=x^2+6x+8$

$x^2+6x=X$ 로 놓으면

$x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$

$X(X+8)+15=0,$

$X^2+8X+15=0$

$(X+3)(X+5)=0$

$\therefore\ X=-3, X=-5$

㉠ : $X=-3 \Rightarrow\ x^2+6x+3=0,$

$x=-3\pm\sqrt{9-3}=-3\pm\sqrt{6}$

㉡ : $X=-5 \Rightarrow\ x^2+6x+5=0,$

$(x+5)(x+1)=0,\ x=-1,-5$

19. 계수가 유리수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한근이 $2-\sqrt{3}$일 때, $\dfrac{c-b}{a}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

계수가 유리수인 이차방정식에서 $2-\sqrt{3}$이 근이면 $2+\sqrt{3}$도 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $-\dfrac{b}{a}=\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=4$

$\dfrac{c}{a}=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$

$\therefore\ \dfrac{c-b}{a}=\dfrac{c}{a}+\left(-\dfrac{b}{a}\right)=1+4=5$

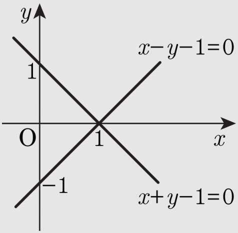
20. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

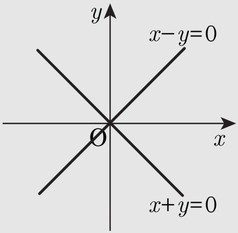
① 무한히 많다. ② 0개 ③ 1개

④ 2개 ⑤ 4개

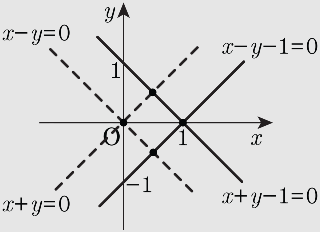
해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.





이것을 하나의 좌표평면에 그리면



위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2개이다.

21. 연립방정식 $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ 의 근 x,y가 $xy=a$, $x+y=b$를 만족할 때, $a-b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$$\begin{cases} 2x-y-5=0 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=25 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠식을 정리해서

$y=2x-5$ 를 ㉡식에 대입한다.

$x^2+(2x-5)^2=25$,

$5x^2-20x=0$, $x(x-4)=0$

$\therefore\ x=0,\ 4$

i) $x=0$일 때, $y=-5$

$\therefore a=0,\ b=-5$

$\therefore a-b=5$

ii) $x=4$일 때, $y=3$

$\therefore a=12,\ b=7$

$\therefore a-b=5$

22. x, y가 연립방정식 $\begin{cases} x^2+4xy+y^2=10 \\ x-y=2 \end{cases}$ 를

만족시킬 때, $(x+y)^2$ 의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 10

해설

$(x-y)^2=4$ 에서

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^2=4 & \cdots ㉠ \\ x^2+4xy+y^2=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡ − ㉠ : $6xy=6$,

$\therefore\ xy=1$

$$\therefore\ (x+y)^2=(x-y)^2+4xy = 4+4\cdot 1=8$$

해설

실제로 연립방정식을 풀면,

$x=y+2$를 ㉡에 대입하면

$(y+2)^2+4y(y+2)+y^2=10$

$6y^2+12y-6=0,\ y^2+2y-1=0$

근의 공식을 이용하면,

$\therefore\ y=-1\pm\sqrt{2},\ x=1\pm\sqrt{2}$(복호동순)

$$\therefore\ (x+y)^2=((1\pm\sqrt{2})+(-1\pm\sqrt{2}))^2 = (\pm2\sqrt{2})^2=8$$

23. $|x+1|+|y-2|=0$을 만족하는 실수 x, y의 곱 xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$|x+1| \geq 0$, $|y-2| \geq 0$이므로 $x+1=0$, $y-2=0$

$\therefore$ $x=-1$, $y=2$

따라서, 구하는 값은 $xy=-1 \cdot 2=-2$

24. 부등식 $[x]^2 \geq [x+2]$를 풀면? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$

② $x \leq 0$ 또는 $x > 2$

③ $x < 0$ 또는 $x \geq 2$

④ $x < 0$ 또는 $x \geq 1$

⑤ $x < 1$ 또는 $x \geq 3$

해설

$[x]^2 \geq [x+2]$에서 $[x]^2 \geq [x]+2$

$[x]^2 - [x] - 2 \geq 0$, $([x]-2)([x]+1) \geq 0$

$\therefore [x] \leq -1$ 또는 $[x] \geq 2$

$\therefore x < 0$ 또는 $x \geq 2$

25. 모든 실수 x, y에 대하여 부등식 $ax^2 + 2bxy + ay^2 \geq 0$성립할 때, a와 b의 관계는? (단, a, b는 양의 실수)

① $a^2 \geq b^2$　② $b^2 \geq a^2$　③ $a^2 + 2b \leq 1$
④ $a^2 + 2b \geq 1$　⑤ $2a + b^2 \leq 1$

해설

$ax^2 + 2bxy + ay^2 = 0$이 항상 성립할 조건은

$a \geq 0$이고 $\dfrac{D}{4} \leq 0$이다.

$\dfrac{D}{4} = b^2y^2 - a^2y^2 \leq 0$

$(b^2 - a^2)y^2 \leq 0$

$\therefore\ a^2 \geq b^2$

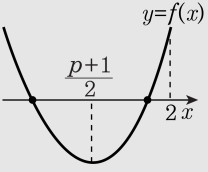
26. x에 대한 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2-p=0$의 서로 다른 두 근이 모두 2보다 작을 때, 양수 p의 값의 범위는?

① $0<p<1$ ② $\frac{1}{2}<p<1$ ③ $1\le p<2$

④ $1<p<\frac{4}{3}$ ⑤ $p>1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2-p$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D라 하면

$\mathrm{D}=(\mathrm{p}+1)^2-4(2-\mathrm{p})>0$

$p^2+6p-7>0,\ \ (p+7)(p-1)>0$

$\therefore p<-7$ 또는 $p>1$

(ii) $f(2)>0$ 에서 $2^2-(p+1)\cdot 2+2-p>0$

$3p<4$

$\therefore p<\frac{4}{3}$

(iii) $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{p+1}{2}$ 이므로

$\frac{p+1}{2}<2$

$\therefore p<3$

(i), (ii), (iii) 에서 $p<-7$ 또는 $1<p<\frac{4}{3}$

그런데 $p>0$이므로 $1<p<\frac{4}{3}$

27. 이차방정식 $x^2 + 2kx + 6 - k = 0$ 의 두 근이 모두 1보다 클 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $0 \le k < 7$　② $-1 \le k \le 2$　③ $-5 \le k \le -2$

④ $-7 < k \le -1$　⑤ $-7 < k \le -3$

해설

이차방정식 $x^2 + 2kx + 6 - k = 0$ 의
두 근이 모두 1 보다 크므로
$f(x) = x^2 + 2kx + 6 - k$ 로 놓으면
(i) $D \ge 0$ 이므로
$k^2 + k - 6 \ge 0$
$(k+3)(k-2) \ge 0$
$\therefore k \le -3, k \ge 2$
(ii) $x^2 + 2kx + 6 - k = (x+k)^2 + 6 - k - k^2$ 에서
$-k > 1$
$\therefore k < -1$
(iii) $f(1) > 0$ 이므로
$1 + 2k + 6 - k > 0$
$\therefore k > -7$
따라서 (i), (ii), (iii) 에서
$\therefore -7 < k \le -3$

28. 두 점 $\mathrm{A}(3,4), \mathrm{B}(6,2)$ 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P 의 좌표는?

① $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ② $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

④ $(4,0)$ ⑤ $(5,0)$

해설

x축 위의 점 P 의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{(a-3)^2+(0-4)^2} = \sqrt{a^2-6a+25}$

$\overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{(a-6)^2+(0-2)^2} = \sqrt{a^2-12a+40}$

조건에서 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$ 이므로

$\sqrt{a^2-6a+25} = \sqrt{a^2-12a+40}$

양변을 제곱하면 $a^2-6a+25 = a^2-12a+40$

$6a = 15, \quad \therefore a = \frac{5}{2}$

따라서 구하는 점 P 의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

29. 두 점 $\mathrm{A}(5, -11)$, $\mathrm{B}(-4, 7)$ 일 때, 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점의 좌표는 $\mathrm{P}(a,\ b)$, 선분 AB를 $2:1$ 로 외분하는 점의 좌표는 $\mathrm{Q}(c,\ d)$ 이다. 이때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하면?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

$$\mathrm{P}(a, b) = \left(\frac{2\cdot(-4)+1\cdot(5)}{2+1}, \frac{2\cdot 7+1\cdot(-11)}{2+1}\right)$$

$$= (-1,\ 1)$$

$$\mathrm{Q}(c, d) = \left(\frac{2\cdot(-4)-1\cdot(5)}{2-1}, \frac{2\cdot 7-1\cdot(-11)}{2-1}\right)$$

$$= (-13,\ 25)$$

$$\therefore\ a+b+c+d = -1+1-13+25 = 12$$

30. 방정식 $x-3y+6=0$ 이 나타나는 직선의 기울기와 y 절편을 차례대로 구하면?

① $\frac{1}{3}$, -2 ② $\frac{1}{3}$, 2 ③ $-\frac{1}{3}$, 2

④ 3, -2 ⑤ -3, 2

해설

$x-3y+6=0$ 을 y 에 대하여 풀면

$3y=x+6,\ y=\frac{1}{3}x+2$

$\therefore$ 기울기 : $\frac{1}{3}$, y 절편 : 2

31. 직선 $ax + y - 1 = 0$이 직선 $2x + by - 5 = 0$에 평행하고, 직선 $x + (a-1)y - 3 = 0$에 수직일 때, $2a + b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

두 직선이 평행하면 기울기가 일치한다.

$\Rightarrow \; -a = -\dfrac{2}{b} \quad \cdots \quad$ ㉠

두 직선이 수직하면 기울기의 곱이 -1이다.

$\Rightarrow \; -a \times -\dfrac{1}{(a-1)} = -1 \quad \cdots \quad$ ㉡

$\therefore$ ㉠, ㉡를 연립하면, $a = \dfrac{1}{2} \quad b = 4$

$\therefore \; 2a + b = 5$

32. 다음 두 직선 $3x+4y=21$, $3x+4y=11$ 사이의 거리를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선과의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=21$ 의 점$(7,0)$

$$\Rightarrow \frac{|7\times 3+0\times 4-11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$$

33. 점 (5, 3) 으로 부터의 거리가 2 이고, 점 (2, 1) 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = x,\ 12x - 5y - 19 = 0$

② $y = 1,\ 12x - 5y - 19 = 0$

③ $y = 1,\ 12x - 5y + 5 = 0$

④ $y = 1,\ 4x - 5y - 8 = 0$

⑤ $y = -1,\ 12x + 5y - 12 = 0$

해설

점 (2, 1) 을 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면 $y - 1 = m(x - 2)$ $\cdots$ ㉠

점 (5, 3) 과 직선 ㉠사이의 거리가 2 이므로

$$\frac{|\,m(5-2) - 3 + 1\,|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$$

$(3m-2)^2 = 4(m^2+1)$

$5m^2 - 12m = 0$

$\therefore\ m = 0,\ \dfrac{12}{5}$

㉠에 대입하면 $y = 1,\ 12x - 5y - 19 = 0$

34. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.
그 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a<0, b<0$)

$$(x^2+y^2+2x+3y-1)m+(x^2+y^2+2x+2y-3)=0$$

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.
$x^2+y^2+2x+3y-1=0$,
$x^2+y^2+2x+2y-3=0$
연립하여 풀면 $(x, y)=(-3,-2),(1,-2)$
그러므로 $(a, b)=(-3,-2)$

35. 원 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ 를 원점에 대하여 대칭 이동한 도형의 방정식은?

① $(x-2)^2+(y+3)^2=4$

② $(x+2)^2+(y-3)^2=4$

③ $(x+2)^2+(y+3)^2=4$

④ $(x-2)^2+(y-3)^2=4$

⑤ $(x+3)^2+(y-2)^2=4$

해설

원점대칭은 x , y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$를 대입한다.

36. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ a\}$, $B = \{2,\ 3,\ a+1\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{2,\ 3\}$ 일 때, 집합 $A \cup B$ 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A \cap B = \{2,\ 3\}$ 이므로 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ $\therefore\ a = 3$

$B = \{2,\ 3,\ 4\}$

$\therefore\ A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이므로 원소의 합은 10 이다.

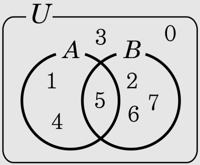
37. 전체집합 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 두 부분집합 $A,\ B$에 대하여 $A \cap B = \{5\}$, $(A \cup B)^c = \{0,\ 3\}$, $A - B = \{1,\ 4\}$일 때, $n(B - A)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



따라서 $B - A = \{2,\ 6,\ 7\}$이므로 $n(B - A) = 3$

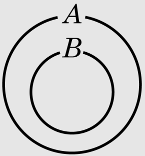
38. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B \subset A$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $A \cap B = \varnothing$ ② $A \cup B = U$ ③ $B - A = \varnothing$

④ $A - B = \varnothing$ ⑤ $A \cap B^c = \varnothing$

해설

$B \subset A$ 이면, 집합 A, B 는 다음 벤 다이어그램과 같은 포함관계를 만족한다.



① $A \cap B = B$

② $A \cup B = A$

④ $A - B \neq \varnothing$

⑤ $A \cap B^c \neq \varnothing$

39. 전체집합 U 의 부분집합에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = A^c \cap B$ 인 관계가 있을 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

① $A = B$　　② $A \subset B$　　③ $B \subset A$

④ $A \cup B = U$　　⑤ $A \cap B = \varnothing$

해설

(좌변) :$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$ ($\because$ 드 모르간의 법칙) $= (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$ ($\because$ 차집합의 성질)
(우변) : $A^c \cap B = B - A$ ($\because$ 차집합의 성질) 이므로 (좌변)=(우변) 이 되기 위해서는 $A - B = \varnothing$ 이 되어야 한다.
$\therefore A - B = \varnothing$ 가 되기 위해서는 $A \subset B$

40. 명제 「$0 < x < 1$ 이면 $|x-a| < 1$ 이다.」가 참이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구할 때 정수의 개수는 ?

① 1개　② 2개　③ 0개　④ 3개　⑤ 5개

해설

$|x-a| < 1$에서 $-1 < x-a < 1$

$\therefore a-1 < x < a+1$

$\{x \mid 0 < x < 1\} \subset \{x \mid a-1 < x < a+1\}$ 이어야 한다.

$\therefore a-1 \le 0,\ a+1 \ge 1$ 에서 $0 \le a \le 1$

$\therefore\ a = 0,\ 1$

$\therefore$ 정수의 개수는 2개

41. 다음 명제의 대우가 참인 것은?

① $xz = yz$ 이면 $x = y$ 이다.

② x 가 3 의 배수이면 x 가 6 의 배수이다.

③ $x^2 > 1$ 이면 $x > 1$ 이다

④ 삼각형 ABC 가 직각삼각형이면 $\angle A = 90°$ 이다.

⑤ $a + b > 2$ 이면 $a > 1$ 또는 $b > 1$ 이다.

해설

⑤ 명제의 대우를 살펴보자.
$a \leq 1$ 이고 $b \leq 1$ 이면 $a + b \leq 2$ 이다. 다음의 대우의 참, 거짓을 판별해보면 a 의 최댓값은 1, b 의 최댓값도 1 이므로 a, b 의 합의 최댓값은 2 이므로 대우는 참이 된다.

42. 세 조건 p, q, r에 대하여 q는 p의 필요조건, q는 r의 충분조건이고 r는 p의 충분조건이다. 이 때, p는 r이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 필요충분조건

해설

q는 p의 필요조건이므로 $p \Rightarrow q$ ······ ㉠
q는 r의 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$ ······ ㉡
r는 p의 충분조건이므로 $r \Rightarrow p$ ······ ㉢
㉠ , ㉡ 에서 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$이므로
$p \Rightarrow r$ ······ ㉣
㉢, ㉣에서 $r \Rightarrow p$, $p \Rightarrow r$이므로 $r \leftrightarrow p$이다.
$\therefore$ 필요충분조건

43. $a>0,\ b>0$일 때, $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

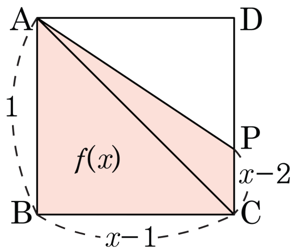
해설

$a>0,\ b>0$이므로 산술기하평균의 관계를 이용하면

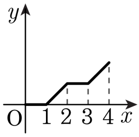
$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+1$

$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+2\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2=4$

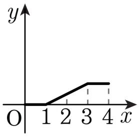
44. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



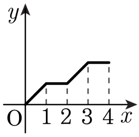
①



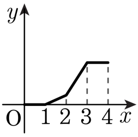
②



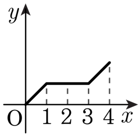
③



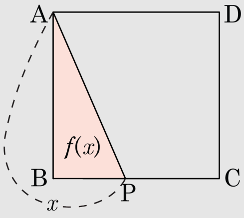
④



⑤



해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$

한편, 각 구간의 경계점에서 함수는 연속이므로 ②가 옳다.

45. 실수전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 f 는 항등함수이고 $g(x) = -3$(x 는 실수) 일 때, $f(2) + g(4)$ 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

f 는 항등함수이므로 $f(x) = x$

$\therefore\ f(2) = 2$

모든 실수 x 에 대하여

$g(x) = -3$ 이므로 g 는 상수함수이다.

$\therefore\ g(4) = -3$

$\therefore\ f(2) + g(4) = 2 + (-3) = -1$ 이다.

46. 다음 보기 중에서 역함수를 갖는 것을 모두 찾아라.

보기

㉠ $y = x - 2$ ㉡ $y = |x - 2|$

㉢ $y = x^2 - 2$ ㉣ $y = x^3 - 2$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ $y = x$ 는 일대일 대응인 함수이므로
역함수를 갖는다.
㉡ $y =| x - 2 |$ 에서 $y = 1$ 이면
$x = -1,\ 3$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.
㉢ $y = x^2 - 2$ 에서 $y = 2$ 이면
$x = \pm 2$ 이므로 일대 일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함 수를 갖지 않는다.
㉣ $y = x^3 - 2$ 는 일대일 대응이므로
역함수를 갖는다.
이 함수가 일대일 대응임을 다음과 같이 보일 수 있다.
$f(x) = x^3 - 2$ 라고 하자.
㉮ $x_1 \neq x_2$ 일 때,
$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^3 - 2) - (x_2^3 - 2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \neq 0$ 이므로
$f(x_1) \neq f(x_2)$
㉯ $y = f(x)$ 의 치역은 실수전체이다.

47. 함수 $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 점 $(1,\ 0)$ 을 지나고, 점근선의 방정식이 $x = 2$, $y = 1$ 일 때, abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

점근선이 $x = 2,\ y = 1$ 이므로

$y = \dfrac{k}{x-2} + 1 \cdots ①$

①이 $(1,\ 0)$ 을 지나므로

$0 = -k + 1 \ \therefore\ k = 1$

$y = \dfrac{1 + x - 2}{x - 2} = \dfrac{x-1}{x-2}$

$\therefore\ a = 1,\ b = -1,\ c = -2$

따라서 $abc = 2$

48. $1 \le x \le a$일 때, $y = \sqrt{2x-1}+3$의 최솟값이 m, 최댓값이 6이다. $a+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$1 \le x \le a$에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1}+3$은 증가함수이므로
$x = 1$ 일때 최솟값을 가진다.
곧, $m = \sqrt{2-1}+3 = 4$
$\therefore m = 4$
또한, $x = a$일 때 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{2a-1}+3$
$\therefore a = 5$
$\therefore a+m = 9$

49. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2} + 2$일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$

50. ${}_nC_4 = {}_nC_6$ 을 만족하는 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 10$

해설

$n = 4 + 6 = 10$