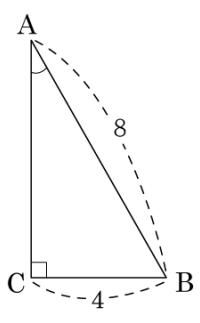
1. 다음과 같은 직각삼각형 △ABC에서 $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 4$일 때, $\sin A - \tan A$의 값은?



① $\frac{1-\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{2-\sqrt{3}}{6}$
③ $\frac{2-2\sqrt{2}}{6}$ ④ $\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$
⑤ $\frac{3-2\sqrt{3}}{6}$

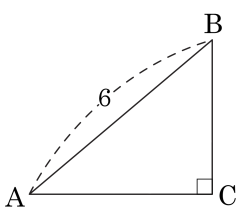
해설

$\overline{AC} = \sqrt{8^2-4^2} = \sqrt{64-16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$\sin A = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\tan A = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \sin A - \tan A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}$

2. $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $\cos A$, $\tan A$ 의 값을 각각 구하면? (단, $0° < A < 90°$)



① $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan A = 1$ ② $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan A = 2$

③ $\cos A = 2\sqrt{3}$, $\tan A = 1$ ④ $\cos A = 3\sqrt{3}$, $\tan A = \frac{1}{2}$

⑤ $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan A = 1$

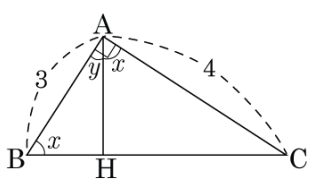
해설

$\sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $\overline{BC} = \overline{AB} \times \sin A = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ 이다.

피타고라스 정리에 의해 $\overline{AC} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$ 이다.

따라서 $\cos A = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 1$ 이다.

3. 다음 보기 중 $\tan x$와 같은 값을 갖는 것을 보기에서 모두 골라라.



보기

㉠ $\frac{\overline{CH}}{\overline{AH}}$ ㉡ $\frac{4}{3}$ ㉢ $\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$ ㉣ $\frac{\overline{AH}}{\overline{CH}}$ ㉤ $\frac{4}{5}$
㉥ $\frac{\overline{AH}}{\overline{BC}}$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉠

▷ 정답: ㉡

▷ 정답: ㉢

해설

$x+y=90°$이므로 $\angle x+\angle C=90°$가 되고, 따라서 $\angle C=y$
$\triangle BCA \backsim \triangle BAH \backsim \triangle ACH$이므로

$$\tan x=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{4}{3}=\frac{\overline{CH}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$$

따라서 $\tan x$와 같은 것은 $\frac{4}{3}$, $\frac{\overline{CH}}{\overline{AH}}$, $\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$이다.

4. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\sin 90° = \cos 90° = \tan 90°$

② $\sin 30° = \cos 60° = \tan 45°$

③ $\sin 90° = \cos 0° = \tan 90°$

④ $\sin 90° + \cos 90° + \tan 45° = 2$

⑤ $\cos 0° + \tan 0° = \sin 90°$

해설

① $\sin 90° = 1, \cos 90° = 0, \tan 90°$는 정할 수 없다.

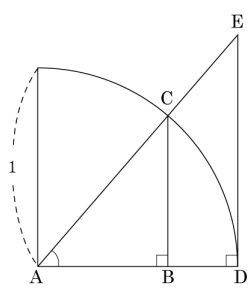
② $\sin 30° = \frac{1}{2}, \cos 60° = \frac{1}{2}, \tan 45° = 1$ 이므로 $\sin 30° = \cos 60° \neq \tan 45°$

③ $\sin 90° = 1, \cos 0° = 1, \tan 90°$는 정할 수 없다.

④ $\sin 90° = 1, \cos 90° = 0, \tan 45° = 1$ 이므로 $1 + 0 + 1 = 2$

⑤ $\cos 0° = 1, \tan 0° = 0, \sin 90° = 1$ 이므로 $1 + 0 = 1$

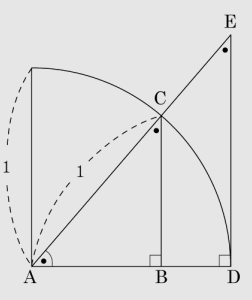
5. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1 인 사분원에서 다음 중 틀린 것을 모두 고르면? (정답 2 개)



① $\sin A = \overline{AB}$ ② $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$ ③ $\cos A = \overline{AD}$

④ $\tan A = \overline{DE}$ ⑤ $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$

해설



① $\sin A = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{BC}}{1} = \overline{BC}$

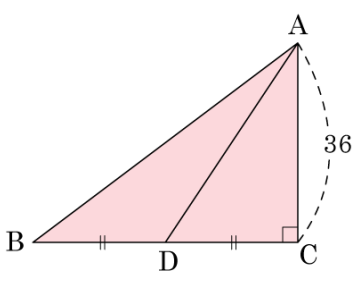
③ $\cos A = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$

② $\sin C = \sin E = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$

④ $\tan A = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{DE}}{1} = \overline{DE}$

⑤ $\cos A = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$

6. 다음 그림과 같이 $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $\overline{AC} = 36$, $\tan B = \frac{3}{4}$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 D 일 때, $\overline{AD}$ 의 길이를 구하여라.



① $5\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{11}$

③ $6\sqrt{12}$ ④ $5\sqrt{13}$

⑤ $12\sqrt{13}$

해설

△ABC 에서

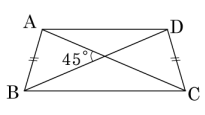
$\tan B = \frac{36}{\overline{BC}} = \frac{3}{4}$ $\therefore \overline{BC} = 48$

$\therefore \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 24$

따라서 △ADC 에서

$\overline{AD} = \sqrt{36^2 + 24^2} = \sqrt{1872} = 12\sqrt{13}$ 이다.

7. 다음 그림과 같이 두 대각선이 이루는 각의 크기가 $45°$ 인 등변사다리꼴 ABCD 의 넓이가 $36\sqrt{2}\text{cm}^2$ 일 때, $\overline{AC}$ 의 길이를 구하면?



① 8 cm ② 10 cm ③ 12 cm ④ 14 cm ⑤ 16 cm

해설

대각선 $\overline{AC} = \overline{BD} = x$ 라면

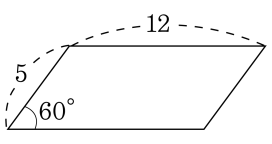
$x \times x \times \frac{1}{2} \times \sin 45 = 36\sqrt{2}$

$x^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 36\sqrt{2}$

$x^2 = 144$

$x = 12$ (cm)

8. 다음 그림과 같은 평행사변형의 넓이를 구하여라.



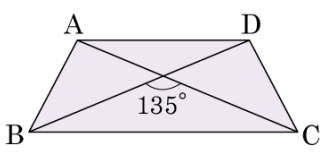
▶ 답:

▷ 정답: $30\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{평행사변형의 넓이}) &= 5 \times 12 \times \sin 60° \\ &= 5 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 30\sqrt{3}\end{aligned}$$

9. 다음 그림과 같은 등변사다리꼴 ABCD 에서 두 대각선이 이루는 각의 크기가 $135°$ 이고, 넓이가 $20\sqrt{2}$ 일 때, 대각선의 길이를 구하면?



① 8 ② $4\sqrt{5}$ ③ $12\sqrt{3}$

④ $52\sqrt{3}$ ⑤ $104\sqrt{3}$

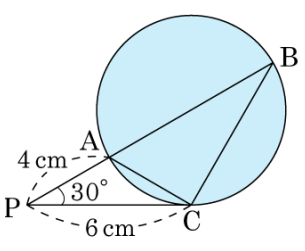
해설

$\overline{AC} = \overline{BD} = x$라 하면 $\frac{1}{2}x^2 \sin 45° = 20\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 = 20\sqrt{2}$,

$x^2 = 80$, $x = 4\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AC} = \overline{BD} = 4\sqrt{5}$

10. 다음 그림에서 $\overline{PC}$ 는 원의 접선이고, $\overline{PB}$ 는 할선이다. $\angle P = 30°$, $\overline{PA} = 4\text{cm}$, $\overline{PC} = 6\text{cm}$ 일 때, $\triangle PBC$ 의 넓이는?



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$ ② $2\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ ③ $\frac{27}{2}\,\text{cm}^2$

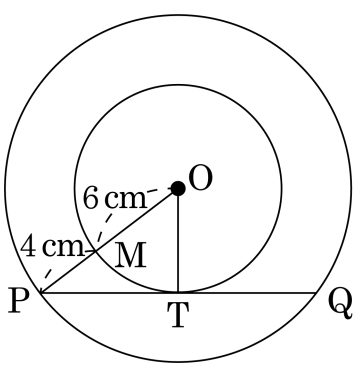
④ $4\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2$

해설

$\overline{AB} = x$ 라 하면 $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PC^2}$ 에서 $4(4+x) = 36$, $4+x = 9$ 이고, $x = 5\,\text{cm}$ 이다.

$\therefore \triangle PBC = \frac{1}{2}\times 6\times 9\times \sin 30° = \frac{27}{2}(\,\text{cm}^2)$

11. 다음 그림과 같이 중심이 같은 두 원에서 $\overline{OP}$ 가 작은 원과 만나는 점을 M , 큰 원의 현 $\overline{PQ}$ 가 작은 원과 만나는 점을 T 라 하자. $\overline{OM} = 6\,\text{cm}, \overline{PM} = 4\,\text{cm}$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 길이는?

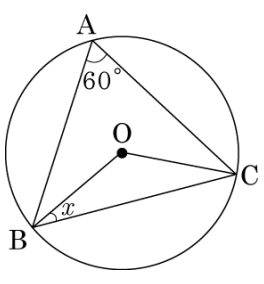


① 13 cm ② 14 cm ③ 15 cm ④ 16 cm ⑤ 17 cm

해설

$\overline{OT} = 6(\text{cm})$ 이고 $\angle OTP = 90°$ 이므로 $\overline{PT} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8(\text{cm})$ 이다.
따라서 $\overline{PQ} = 2 \times 8 = 16(\text{cm})$ 이다.

12. 다음 그림에 $\angle BAC = 60°$ 일 때, $\angle OBC$ 의 크기를 구하면?



① 30° ② 40° ③ 50° ④ 60° ⑤ 70°

해설

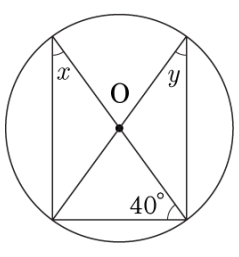
중심각= 2× 원주각

$\angle BOC = 2 \times 60° = 120°$

$\triangle BOC$ 는 이등변삼각형

$\therefore \angle OBC = \dfrac{180° - 120°}{2} = 30°$

13. 다음 그림에서 $\angle x - \angle y$ 의 크기를 구하여라.
(단, 단위는 생략)



▶ 답 :

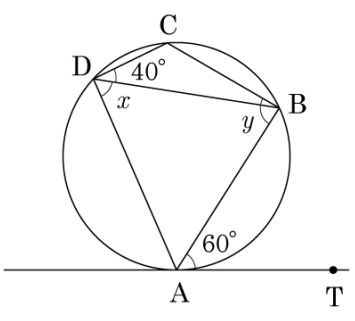
▷ 정답 : 0

해설

한 원 또는 합동인 두 원에서 호의 길이가 같은 원주각의 크기는 같다.

$x = y = 180° - (90° + 40°) = 50°$

14. 원 O 에서 $\angle CDB = 40°$, $\angle BAT = 60°$ 이고 직선 AT 가 접선일 때, $\angle x + \angle y =$ ( )° 이다. 이 때, ( ) 안에 알맞은 수를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 140

해설

$\angle ADB = \angle BAT$

$\therefore \angle x = 60°$

□ABCD 는 내접사각형이므로

$\angle ABC + \angle ADC = 180°$

$\angle ABC + 100° = 180°$

$\therefore \angle ABC = 80°$

$\therefore \angle x + \angle y = 140°$

15. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$ 일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$(x+1)(y+1)(z+1)$
$=xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$
$=7$

16. 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $(a,\ b,\ c) = ab + bc$로 정의한다. 이때, 등식 $(x,\ a,\ y) - (2x,\ b,\ y) = (x,\ 2,\ y)$이 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여 성립하도록 $a,\ b$의 값을 정하면?

① $a = 1,\ b = 2$　② $a = 2,\ b = 2$　③ $a = 2,\ b = 0$

④ $a = 0,\ b = 2$　⑤ $a = 0,\ b = 0$

해설

기호의 정의에 따라서 주어진 식을 다시 쓰면
$(ax + ay) - (2bx + by) = 2x + 2y$
이 식을 $x,\ y$에 대하여 정리하면
$(a - 2b - 2)x + (a - b - 2)y = 0$
이 등식이 임의의 $x,\ y$에 대하여 성립하므로
$a - 2b - 2 = 0,\ a - b - 2 = 0$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2,\ b = 0$

17. 두 다항식 $f(x)=x^3-ax+b, g(x)=x^2+ax-2b$의 최대공약수가 $x-1$일 때, $f(x), g(x)$의 최소공배수를 구하면?

① $(x-1)^2(x+1)(x+2)$ ② $(x-1)^2(x+4)(x+2)$

③ $(x-1)(x+1)^2(x+2)$ ④ $(x-1)(x+4)^2(x+2)$

⑤ $(x-1)(x+4)(x+2)^2$

해설

인수정리에 의해

$f(1)=1-a+b=0$

$g(1)=1+a-2b=0$

연립하면, $a=3, b=2$

$\therefore f(x)=x^3-3x+2$

조립제법을 이용하면,

$f(x)=(x-1)^2(x+2)$

$g(x)=x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$

$\therefore$ 최소공배수: $(x-1)^2(x+4)(x+2)$

18. 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최대공약수가 $x+3$이고, 최소공배수가 x^3+4x^2+x-6일 때 두 이차식을 구하면?

① $\begin{cases} x^2+x-3 \\ x^2+5x+1 \end{cases}$
② $\begin{cases} x^2+x-6 \\ x^2+4x+3 \end{cases}$
③ $\begin{cases} x^2+x-2 \\ x^2-x+3 \end{cases}$
④ $\begin{cases} x^2+2x-3 \\ x^2+5x+6 \end{cases}$
⑤ $\begin{cases} x^2+4x+3 \\ x^2-x-6 \end{cases}$

해설

$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x+2)(x+3)$
두 이차식은 $(x-1)(x+3)$, $(x+2)(x+3)$에서
x^2+2x-3, x^2+5x+6

19. 이차함수 $y = x^2 - kx + 3k + 2$의 그래프에 의하여 잘려지는 x축의 길이가 3일 때, 모든 실수 k의 값의 합은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

이차함수 $y = x^2 - kx + 3x + 2$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ 이라 하면
$\alpha,\ \beta$ 는 이차방정식 $x^2 - kx + 3k + 2 = 0$ 이 두 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = k,\ \alpha\beta = 3k + 2$
잘려지는 x 축의 길이가 3이므로 $|\alpha - \beta| = 3$
이 때, $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$이므로 $9 = k^2 - 4(3k + 2)$
$k^2 - 12k - 17 = 0$
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 12이다.

20. x 축과 두 점 $(-2,\ 0)$, $(1,\ 0)$ 에서 만나고 최댓값이 9 인 포물선의 방정식은?

① $y = -4x^2 + 4x - 8$

② $y = 4x^2 - 4x + 8$

③ $y = -4x^2 + 4x + 8$

④ $y = -4x^2 - 4x + 8$

⑤ x 축과 두 점 $(p,0),(q,0)$ 에서 만나는 $\overline{pq}$ 의 길이를 이등분한 점이 축의 방정식이 된다.

해설

대칭축이 두 점의 중점 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ 을 지나므로 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ 9\right)$

따라서 $y = a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 9$

$(1,\ 0)$ 을 대입하면 $0 = \frac{9}{4}a + 9$, $a = -4$

$\therefore\ y = -4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 9 = -4x^2 - 4x + 8$

21. 가로의 길이가 6cm , 세로의 길이가 10cm 인 직사각형에서 가로의 길이를 $x$cm 길게 하고 세로의 길이를 $x$cm 짧게 한 직사각형의 넓이가 최대일 때, x 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 14 ⑤ 15

해설

넓이를 y 라 하면

$$\begin{aligned} y &= (6+x)(10-x) \\ &= -x^2 + 4x + 60 \\ &= -(x^2 - 4x + 4 - 4) + 60 \\ &= -(x-2)^2 + 64 \end{aligned}$$

따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값 64 를 가진다.

22. 밑면의 길이와 높이의 합이 28 인 삼각형의 넓이가 최대가 될 때 밑변과 높이의 길이를 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 밑변 : 14

▷ 정답: 높이 : 14

해설

삼각형의 넓이를 y 라 하면, 밑변을 x , 높이는 $28 - x$라 두면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x(28 - x) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 14x \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 28x + 196 - 196) \\ &= -\frac{1}{2}(x - 14)^2 + 196 \end{aligned}$$

따라서 밑변은 14 , 높이는 14 이다.

23. 사차방정식 $x^4+x^3-x^2-7x-6=0$의 두 허근을 α,β 라 할 때, $\alpha+\beta$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

-1	1	1	-1	-7	-6
		-1	0	1	6
2	1	0	-1	-6	0
		2	4	6	
	1	2	3	0	

$(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)=0$
$x^2+2x+3=0$ 의 두 근이 허근이므로
$(D<0\ )\alpha+\beta=-2$

24. 다음 연립부등식의 해를 $a < x < b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 5x + 2 > 3x - 4 \\ 2x - 1 < -7x + 26 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$5x + 2 > 3x - 4$

$2x > -6$

$\therefore\ x > -3$

$2x - 1 < -7x + 26$

$9x < 27$

$\therefore\ x < 3$

$-3 < x < 3$ 이므로 $a = -3,\ b = 3$

$\therefore\ a + b = 0$

25. 연립부등식 $2x+a<x+2<4(x-1)$ 의 해가 $b<x<5$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -5 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$2x+a<x+2<4(x-1)$

$2x+a<x+2 \rightarrow x<2-a$

$x+2<4(x-1) \rightarrow x>2$

$2<x<2-a$ 가 $b<x<5$ 이므로 $a=-3,\ b=2$

$\therefore\ a+b=-1$

26. 이차부등식 $-4x^2+12x-9\geq 0$의 해는?

① $-\frac{3}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}$ ② $x\leq-\frac{3}{2}$, $x\geq\frac{3}{2}$

③ $x\neq\frac{3}{2}$인 모든 실수 ④ 해는 없다.

⑤ $x=\frac{3}{2}$

해설

$-4x^2+12x-9\geq 0$

$\Rightarrow\ 4x^2-12x+9\leq 0$

$\Rightarrow\ (2x-3)^2\leq 0$

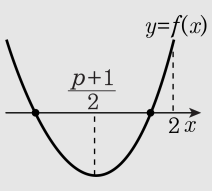
$\therefore\ x=\frac{3}{2}$

27. x에 대한 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2-p=0$의 서로 다른 두 근이 모두 2보다 작을 때, 양수 p의 값의 범위는?

① $0<p<1$ ② $\frac{1}{2}<p<1$ ③ $1\le p<2$
④ $1<p<\frac{4}{3}$ ⑤ $p>1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2-p$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D라 하면
$D=(p+1)^2-4(2-p)>0$
$p^2+6p-7>0,\ (p+7)(p-1)>0$
$\therefore p<-7$ 또는 $p>1$
(ii) $f(2)>0$ 에서 $2^2-(p+1)\cdot 2+2-p>0$
$3p<4$
$\therefore p<\frac{4}{3}$
(iii) $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{p+1}{2}$ 이므로
$\frac{p+1}{2}<2$
$\therefore p<3$
(i), (ii), (iii) 에서 $p<-7$ 또는 $1<p<\frac{4}{3}$
그런데 $p>0$이므로 $1<p<\frac{4}{3}$

28. 이차방정식 $x^2-2mx+m+6=0$의 두 근이 모두 1보다 작을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $m \le -6$ ② $m \le -4$ ③ $m \le -2$

④ $m \le 0$ ⑤ $m \le 2$

해설

$f(x)=x^2-2mx+m+6=(x-m)^2-m^2+m+6$으로 놓으면

$\frac{D}{4}=m^2-1\cdot(m+6)=m^2-m-6$

$f(1)=1-2m+m+6=-m+7$

두 근이 모두 1보다 작으려면 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.

따라서,

(ⅰ) 판별식 : $\frac{D}{4}=m^2-m-6 \ge 0$

$(m+2)(m-3) \ge 0$

$\therefore m \le -2$ 또는 $m \ge 3$ ····· ㉠

(ⅱ) 경계값의 부호 : $f(1)=-m+7>0$

$\therefore m<7$ ····· ㉡

(ⅲ) 축 : $m<1$ ····· ㉢

㉠, ㉡, ㉢으로부터 구하는 m의 값의 범위는 $m \le -2$

29. 두 점 A $(-5,1)$, B $(3,5)$ 에서 같은 거리에 있는 y 축 위의 점의 좌표는?

① $(0,0)$ ② $(0,1)$ ③ $(0,3)$

④ $(0,4)$ ⑤ $(0,-1)$

해설

y 축 위의 점을 Q $(0,a)$ 라 하면 $\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{QB}}$

$\therefore (0+5)^2 + (a-1)^2 = (0-3)^2 + (a-5)^2$

정리하면 $a = 1$ $\therefore$ Q $(0,1)$

30. 두 점 A $(-3,\ 4)$, B $(2,\ 6)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점 Q의 좌표는?

① $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$
② $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$
③ $\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$
④ $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{7}{4}\right)$
⑤ $\mathrm{P}\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{15}{2}\right)$

해설

P의 좌표를 P $(a,\ 0)$라 하면
$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$ 이므로
$\sqrt{(a+3)^2+(-4)^2} = \sqrt{(a-2)^2+(-6)^2}$
Q의 좌표를 Q $(0,\ b)$라 하면
$\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{BQ}}$에서
$\sqrt{3^2+(b-4)^2} = \sqrt{(-2)^2+(b-6)^2}$
두 식을 제곱하여 정리하면 $a = \frac{3}{2},\ b = \frac{15}{4}$
$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ 0\right),\ \mathrm{Q}\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$

31. $\overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 2$ 이고, $\overline{BE} : \overline{ED} = 1 : 3$ 이다. $\overline{AD} : \overline{DE}$ 값은?

① 1 : 1 ② 2 : 3 ③ 1 : 2 ④ 2 : 5 ⑤ 1 : 3

해설

$\overline{BE} : \overline{ED} = 1 : 3$ 이므로

$\overline{ED} = \frac{3}{4}\overline{BD}$ …㉠이다.

또한 $\overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 2$ 이므로

$\overline{DB} = 2\overline{AD}$ …㉡ 이다.

㉠과 ㉡로부터

$\overline{ED} = \frac{3}{4}\overline{BD} = \frac{3}{4} \times 2 \times \overline{AD} = \frac{3}{2}\overline{AD}$ 이다.

따라서 $\overline{AD} : \overline{DE} = \overline{AD} : \frac{3}{2}\overline{AD} = 1 : \frac{3}{2} = 2 : 3$ 이다.

32. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0,\ 3)$, $(4,\ 3)$ 을 지나는 원의 반지름의길이는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

중심을 $(a,\ a-1)$, 반지름을 r이라 하면,
구하는 원의 방정식은
$(x-a)^2 + (y-a+1)^2 = r^2$ ·····㉠
i) ㉠ 이 $(0,\ 3)$ 을 지나므로
$a^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 8a + 16 = r^2$ ·····㉡
ii) ㉠이 $(4,\ 3)$ 을 지나므로
$(4-a)^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 16a + 32 = r^2$ ·····㉢
㉡ − ㉢ : $8a - 16 = 0$
$\therefore\ a = 2$
$\therefore$ ㉡에서 $r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$
$\therefore\ r = 2\sqrt{2}$ $(\because\ r > 0)$

33. 중심이 $y = 2x$ 위에 있고, 두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$ 을 지나는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ ② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ ④ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$

⑤ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$

해설

중심이 $y = 2x$ 위에 있다고 했으므로
두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$ 을 지나는
원의 중심은 $(a, 2a)$ 로 나타낼 수 있다.
$(a,\ 2a)$ 를 중심으로 하는 원을 식으로 표현하면
$(x-a)^2 + (y-2a)^2 = r^2$ 이다.
따라서 두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$ 은
$(x-a)^2 + (y-2a)^2 = r^2$ 를 지나므로 대입했을 때 등식이 성립한다.
두 식을 연립하면, 두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$ 을 지나는 원의 방정식이
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 임을 알 수 있다.

34. 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있고, 두 점 $(3,\ 0),\ (0,\ 1)$ 을 지나는 원의 방정식은 ?

① $x^2+y^2-2x+4y-6=0$

② $x^2+y^2+2x-4y-6=0$

③ $5x^2+5y^2-8x+16y-21=0$

④ $5x^2+5y^2+8x-16y-21=0$

⑤ $x^2+y^2-4x+8y-12=0$

해설

구하는 원의 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있으므로 중심을 $(a,\ -2a)$ 라 할 수 있다.
$(x-a)^2+(y+2a)^2=r^2$
점 $(3,\ 0)$ 을 지나므로,
$(3-a)^2+(2a)^2=r^2\cdots①$
또, 점 $(0,\ 1)$ 을 지나므로,
$a^2+(1+2a)^2=r^2\cdots②$
①, ②에서 $a=\frac{4}{5},\ r^2=\frac{37}{5}$
$\therefore\ \left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{8}{5}\right)^2=\frac{37}{5}$
정리하면 $5x^2+5y^2-8x+16y-21=0$

35. 두 정점 A(0, 0), B(0, 6) 에서의 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 가 그리는 도형의 넓이를 구하면?

① π ② 4π ③ 8π ④ 12π ⑤ 16π

해설

점 P 의 자취는 A, B 를 2 : 1 로 내분하는 점과
외분하는 점을 지름의 양 끝으로 하는 원과 같다.

⇒ 내분점은 $\left(0,\ \frac{2\times 6}{2+1}\right) = (0,\ 4)$

⇒ 외분점은 $\left(0,\ \frac{2\times 6}{2-1}\right) = (0,\ 12)$

∴ 중심은 (0, 8) 이고, 반지름이 4 인 원

⇒ 넓이는 $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$

36. x 축 및 y 축에 접하고 원 $(x-7)^2+(y-6)^2=4$ 에 외접하는 원은 두 개 있다. 이 두 원의 반지름의 합은?

① 10 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

해설

조건을 만족하는 원은 제1사분면에서 두 개 존재한다. 원의 반지름을 a 라 하면, 중심의 좌표는 $(a,\ a)$ 이다. 주어진 원과 외접하기 위해서는 두 원의 중심 간의 거리가 반지름의 합과 같으면 된다.

$\sqrt{(7-a)^2+(6-a)^2}=a+2$

양변 제곱하여 정리하면,

$2a^2-26a+85=a^2+4a+4$

$a^2-30a+81=0$

따라서, 두 개의 원의 반지름은 $3, 27$ 이고 그 합은 근과 계수와의 관계에서 30

37. 직선 $y = 2x + b$ 와 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b < -\sqrt{5}$ 또는 $b > \sqrt{5}$ ② $b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

③ $b < -3\sqrt{5}$ 또는 $b > 3\sqrt{5}$ ④ $b < -4\sqrt{5}$ 또는 $b > 4\sqrt{5}$

⑤ $b < -5\sqrt{5}$ 또는 $b > 5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식
$5x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0 \cdots\cdots$ ㉠
의 판별식을 D 라고 하면
$\frac{D}{4} = (2b)^2 - 5(b^2 - 4) = -b^2 + 20$
원과 직선이 만나지 않으려면 ㉠이
실근을 갖지 않아야 하므로
$\frac{D}{4} < 0$ 에서 $-b^2 + 20 < 0, b^2 - 20 > 0$
$\therefore b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

38. 원 $x^2+y^2=8$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-2<k<2$　② $0<k<4$　③ $-4<k<0$

④ $-2<k<0$　⑤ $-4<k<4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d를 구하면

$$d=\frac{|0+0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<r$이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2} \quad \therefore\ -4<k<4$$

39. 기울기가 2 이고 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하는 두 직선의 y 절편을 각각 $a,\ b$ 라 할 때, $a - b$ 의 값은?(단 $a > b$)

① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $6\sqrt{5}$

해설

기울기가 2 이고
원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하는 직선의 방정식은
$y = 2x \pm 3\sqrt{2^2 + 1}$
곧 $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$ 이므로
$a = 3\sqrt{5},\ b = -3\sqrt{5}$ ($\because a > b$)
$\therefore a - b = 6\sqrt{5}$

40. 다음 중에서 집합인 것을 모두 고른 것은?

㉠ 5의 배수의 모임
㉡ 가장 작은 자연수의 모임
㉢ 1보다 크고 2보다 작은 자연수의 모임
㉣ 50에 가까운 수의 모임
㉤ 유명한 축구 선수의 모임

① ㉠
② ㉠, ㉡
③ ㉠, ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ '가까운' 이란 기준이 명확하지 않아 집합이 아니다.
㉤ '유명한' 이란 기준이 명확하지 않아 집합이 아니다.

41. 다음 중 옳은 것은?

① $A = \varnothing$ 이면 집합 A 의 원소의 개수는 1 개 이다.

② 집합 A 의 원소의 개수보다 집합 B 의 원소의 개수가 많으면 $A \subset B$ 이다.

③ $A \subset B$ 이면 집합 B 의 원소의 개수가 집합 A 의 원소의 개수보다 많다.

④ $A = \{x \mid x$는 12 이하의 5의 배수$\}$ 이면 $n(A) = 3$ 이다.

⑤ $n(\{1,\ 4,\ 6,\ 8\}) - n(\{1,\ 2,\ 4,\ 6\}) = 0$ 이다.

해설

① $A = \varnothing$ 이면 집합 A 의 원소의 개수는 0 개 이다.
② 반례 : $\{3\} \not\subset \{4,\ 5\}$
③ 반례 : $\{2,\ 4\} \subset \{2,\ 4\}$, $n(\{2,\ 4\}) = n(\{2,\ 4\})$
④ $A = \{x \mid x$는 12 이하의 5의 배수$\}$ 이면 $n(A) = 2$ 이다.

42. 두 유한집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A \subset B$ 이면 $n(A) < n(B)$ 이다.

② $A \neq B$ 이면 $n(A) \neq n(B)$ 이다.

③ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.

④ $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.

⑤ $A = B$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이다.

해설

① $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c\}$ 이면 $A \subset B$ 이지만 $n(A) = n(B)$ 이다.
② $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 이면 $A \neq B$ 이지만 $n(A) = n(B)$ 이다.
③ $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 이면 $n(A) < n(B)$ 이지만 $A \not\subset B$ 이다.
④ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이고, $A \neq B$ 이다.

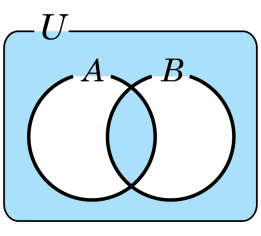
43. 두 집합 $A=\{1, a, a+2\}$, $B=\{3, a-2, 2\times a\}$ 에 대하여 $A-B=\{5\}$ 일 때, a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$a-b=\{5\}$ 이므로 $5 \in A$ 이다.
(1) $a=5$ 일 때, $A=\{1,5,7\}, B=\{3,10\}$ 이므로 $A-B=\{1,5,7\} \neq \{5\}$ 이다.
(2) $a+2=5$, 즉 $a=3$ 일 때, $A=\{1,3,5\}$, $B=\{1,3,6\}$ 이므로 $A-B=\{5\}$ 이다.
(1),(2)에서 $a=3$ 이다.

44. 다음과 같은 벤 다이어그램에서 $n(U) = 30, n(A) = 14, n(B) = 11, n(B \cap A^c) = 7$ 일 때, 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

각 집합의 원소의 개수를 벤 다이어그램에 나타내면 다음 그림과 같으므로 $4 + 9 = 13$ 이다.

45. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
'$xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.
대우 : $x = 0,\ y = 0 \ \Rightarrow \ xy = 0$ (참)

46. 다음 중 명제 '$ab = |ab|$ 이면 $a \geq 0$ 이고 $b \geq 0$ 이다. ' 가 거짓임을 보여주는 반례로 알맞은 것은?

① $a = 2, b = 2$
② $a = -3, b = -1$
③ $a = \frac{1}{2}, b = 1$
④ $a = -1, b = 1$
⑤ $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{3}$

해설

$a = -3$, $b = -1$ 이면 $ab = |ab|$ 이지만 $a \geq 0$, $b \geq 0$ 은 아니다.

47. 실수 x에 대한 두 조건

p : $\lvert x-2\rvert < a$ (단, $a>0$)
q : $x<-3$ 또는 $x>1$

에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되기 위한 a의 값의 범위를 $\alpha < a \leq \beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\lvert x-2\rvert < a$ 에서 $-a < x-2 < a$ $\therefore 2-a < x < 2+a$ $\therefore$
$P=\{x \mid 2-a<x<2+a\}$, $Q=\{x \mid x<-3$ 또는 $x>1\}$
따라서 $P \subset Q$가 되려면 $2+a \leq -3$ ··· ㉠ 또는 $2-a \geq 1$ ··· ㉡,
즉, $a \leq -5$ 또는 $a \leq 1$
그런데 $a>0$이므로 구하는 a의 범위는 $0<a \leq 1$

㉠ :

㉡ :

$\therefore \alpha=0,\ \beta=1$
$\therefore \alpha+\beta=1$

48. 실수 x에 대한 두 조건 p : $0 \le x \le 2$, q : $x + a \le 0$이 있다. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면 $p \rightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x | 0 \le x \le 2\}$, $Q = \{x | x \le -a\}$

위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a$, $a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

49. 두 조건 $p : -2 \le x \le 4$ 또는 $x \ge 8$, $q : x \ge a$에 대하여 $p \Rightarrow q$일 때, a의 최댓값은?

① -2 ② 0 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (P \subset Q)$ 이므로

$\therefore a \le -2$, 최댓값 : -2

50. 명제 '$x \le -1$ 이면 $3x+2 \le k$ 이다.' 가 참일 때, 다음 중 상수 k 의 값으로 옳은 것은?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

해설

$p : x \le -1$, $q : 3x+2 \le k$ 라 하고, 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때 명제 $p \to q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ 이다.

$-1 \le \frac{k-2}{3}$, $-3 \le k-2$

$\therefore\ k \ge -1$

51. 실수 x 에 대하여 명제 '$ax^2+a^2x-6\neq 0$ 이면 $x\neq 2$ 이다.' 가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a\neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
즉, '$x=2$ 이면 $ax^2+a^2x-6=0$ 이다.' 가 참이므로
$4a+2a^2-6=0,\ 2a^2+4a-6=0,$
$a^2+2a-3=0,\ (a+3)(a-1)=0$
$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=1$
따라서 a 의 값의 합은 $-3+1=-2$

52. 다음 중 p는 q이기 위한 충분조건이지만, 필요조건은 아닌 것은?

① $p : x^2 = y^2,\ q : x = y$

② p : 3의 배수, q : 9의 배수

③ $p : x = 1, y = 1,\ q : x + y = 2, xy = 1$

④ $p : |x - 1| = 2,\ q : x^2 - 2x - 3 = 0$

⑤ $p : a + b > 2,\ q : a > 1$ 또는 $b > 1$

해설

① 필요조건

② 필요조건

③ 필요충분조건

④ 필요충분조건

⑤ [반례] $a = 2,\ b = -10$일 때, $q \to p$가 성립하지 않는다.

53. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B)\cup(B-A)=U$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A=B$　② $B\subset A$　③ $A\subset B$

④ $A\cap B=\varnothing$　⑤ $A^C=B$

해설

좌변의 집합이 나타내는 부분은 A, B의 합집합에서 교집합을 뺀 부분의 원소들을 나타낸다.
그런데, 그 부분이 전체집합이 되어야 하므로 A와 B의 교집합은 없으면서, A 와 B 의 합집합이 전체집합이 되는 꼴이 나타나야 한다.
따라서, 이를 만족하는 것은 ④, ⑤인데, 여기에서 ④번은 필요조건에 성립되지 않으므로 답은 ⑤번이 된다.

54. 명제 p, q, r 에 대하여 p 는 q이기 위한 필요조건, r 은 q이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?

① 필요　② 충분

③ 필요충분　④ 아무 조건도 아니다.

⑤ q 에 따라 다르다.

해설

p 는 q이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q이기 위한 충분조건,
즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
그러나 $p \Rightarrow r$인지는 알 수 없다.
따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

55. 다음 ㉮, ㉯에 알맞은 것끼리 짝지어진 것은?

> 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p 는 r이기 위한 충분조건, q는 r이기 위한 충분조건, s는 r이기 위한 필요조건, q는 s이기 위한 필요조건일 때, s는 p이기 위한 (㉮) 조건이며 p는 q이기 위한 (㉯) 조건이다.

① 필요, 필요　　② 필요, 충분

③ 충분, 필요　　④ 충분, 충분

⑤ 필요충분, 충분

해설

네 조건 p, q, r, s를 만족하는 집합은 각각 P, Q, R, S 라고 하면
$p \subset R$, $Q \subset R$, $S \supset R$, $Q \supset S$, $P \subset R$, $R \subset S$ 이므로 $P \subset S$
따라서 S 는 r이기 위한 필요조건이다.
$Q \subset R$, $R \subset S$, $S \subset Q$이므로 $Q = R = S$
$P \subset R$이므로 $P \subset Q$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.