

1. x 에 대한 일차방정식 $(a^2 + 3)x + 1 = a(4x + 1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$(a^2 + 3 - 4a)x = a - 1$$

모든 x 에 대해 성립하려면

$$a^2 - 4a + 3 = 0, \quad a - 1 = 0$$

$$\text{공통근} : a = 1$$

2. 방정식 $|x + 5| = 1$ 를 만족하는 x 의 값들의 합은?

① -9

② -10

③ -11

④ -12

⑤ -13

해설

$$|x + 5| = 1$$

$$\Rightarrow x + 5 = 1 \text{ 또는 } x + 5 = -1$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = -6$$

3. 방정식 $|x| + |x - 1| = 2$ 의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

i) $x < 0$ 일 때,

$$-x - (x - 1) = 2 \text{ 이므로 } -2x + 1 = 2$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}$$

ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,

$$x - (x - 1) = 2 \text{ 이므로 } 0 \cdot x = 1$$

$\therefore$ 해가 없다.

iii) $1 \leq x$ 일 때,

$$x + x - 1 = 2 \text{ 이므로 } 2x = 3$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}$$

(i), (ii), (iii)에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

4. $|x+1| + |x-2| = x+3$ 을 만족하는 해의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

i) $x < -1$ 일 때,

$$-x-1-x+2=x+3$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3} \text{ (모순)}$$

ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,

$$x+1-x+2=x+3$$

$$\therefore x = 0$$

iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$x+1+x-2=x+3$$

$$\therefore x = 4$$

5. 이차방정식 $3x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 근을 A, B (단, $A < B$)라 할 때, $3A + B$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$(3x + 1)(x - 1) = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 1$$

$$\therefore 3A + B = 0$$

6. 방정식 $(x-1)^2 + |x-1| - 6 = 0$ 의 두 근의 합은?

① -1

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 6

해설

(i) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2 - 2x + 1 + x - 1 - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0, (x-3)(x+2) = 0 \text{이므로}$$

$$x = -2, x = 3$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 3$

(ii) $x < 1$ 일 때

$$x^2 - 2x + 1 - x + 1 - 6 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$$

$$x = -1, x = 4$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x = -1$

(i), (ii)에서 $x = 3, -1$ 이므로

두 근의 합은 2

7. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0$$

① $0, \pm 1$

② $0, \pm 2$

③ $\pm 1, \pm 2$

④ $\pm 2, \pm 3$

⑤ $\pm 3, \pm 4$

해설

(i) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$ 에서

$x \geq 0$ 일 때,

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$\therefore x = 2, \text{ 또는 } x = 3$

(ii) $x < 0$ 일 때,

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x + 2)(x + 3) = 0$$

$\therefore x = -2, \text{ 또는 } x = -3$

(i), (ii)에서 $x = \pm 2, x = \pm 3$

8. 이차방정식 $x^2 - mx + 2m + 1 = 0$ 의 한 근이 1일 때 다른 한 근은?
(단, m 은 상수)

① 3

② 2

③ 0

④ -1

⑤ -3

해설

$x^2 - mx + 2m + 1 = 0$ 에 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 - m + 2m + 1 = 0 \quad \therefore m = -2$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0, \quad (x + 3)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -3, 1$$

따라서, 다른 근은 -3

9. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이 되도록 유리수 p, q 를 정할 때, $p + q$ 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ 1

⑤ 2

해설

유리계수 이차식의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이면,
그 켤레근인 $2 - \sqrt{3}$ 도 방정식의 근이므로
근과 계수와의 관계에 의해서

$$-p = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$$

$$\therefore p = -4$$

$$q = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

$$\therefore q = 1$$

$$\therefore p + q = -4 + 1 = -3$$

10. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $-1 + \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -1$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = -1 + \sqrt{2}$ 를 대입하여 정리하면

$$3 - 2\sqrt{2} + a(-1 + \sqrt{2}) + b = 0$$

$$-a + b + 3 + (a - 2)\sqrt{2} = 0$$

$$-a + b + 3 = 0 \text{ 과 } a - 2 = 0 \text{ 에서 } a = 2, b = -1$$

11. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 1 \pm i$ 를 대입하여 정리하면

$1 + 2i - 1 + a(1 + i) + b = 0$ 과

$a + b + (a + 2)i = 0$ 이다.

위 식을 정리하면 $a + b = 0$ 과 $a + 2 = 0$ 에서

$a = -2, b = 2$ 이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.

따라서 두 근은 $1 + i, 1 - i$

근과 계수의 관계에서

$$-a = (1 + i) + (1 - i) = 2 \quad \therefore a = -2$$

$$b = (1 + i)(1 - i) = 2 \quad \therefore b = 2$$

12. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$ 의 두 근이 3, b 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$x = 3$ 이 $x^2 - ax + 12 = 0$ 의 근이므로

$$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore a = 7$$

이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 에서 $(x - 3)(x - 4) = 0$

그러므로 $x = 3$ 또는 $x = 4$

$$\therefore b = 4 \quad \therefore ab = 28$$

13. 이차방정식 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 의 한 근이 1일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

1이 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 의 근이므로

$x = 1$ 을 대입하면 $1 + m + m - 1 = 0 \quad \therefore m = 0$

주어진 방정식은 $x^2 - 1 = 0 \quad \therefore x = \pm 1$

따라서 다른 한 근은 $x = -1$

14. 이차방정식 $x^2 + 6x + a = 0$ 의 한 근이 $b + \sqrt{3}i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 실수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로

다른 한 근은 $b - \sqrt{3}i$ 이다.

따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서

$$a = (b + \sqrt{3}i)(b - \sqrt{3}i) = b^2 + 3$$

$$-6 = (b + \sqrt{3}i) + (b - \sqrt{3}i) = 2b,$$

$$b = -3, a = 12$$

따라서 $a + b = 9$

15. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이 되도록 유리수 p, q 를 정할 때, $p + q$ 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ 1

⑤ 2

해설

$x^2 + px + q = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이고

p, q 가 유리수이면 남은 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.

두 근의 합 $-p = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$

$\therefore p = -4$

두 근의 곱 $q = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$

$\therefore p + q = -4 + 1 = -3$

16. $a^2 - 3a + 1 = 0$ 일 때, $a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$a^2 - 3a + 1 = 0$ 에서

$$a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1} = a - 1 + \frac{3}{3a} = a + \frac{1}{a} - 1$$

한편, $a^2 - 3a + 1 = 0$ 의 양변을 a 로 나누면

$$a - 3 + \frac{1}{a} = 0 \quad \therefore a + \frac{1}{a} = 3$$

$$\therefore (\text{준식}) = \left(a + \frac{1}{a}\right) - 1 = 2$$

17. 다음 설명 중 틀린 것을 고르면?

① $x^2 + 5x + 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가진다.

② $x^2 + 5 = 0$ 는 두 허근을 가진다.

③ $m = 0$ 또는 4일 때, $x^2 - mx + m = 0$ 은 중근을 가진다.

④ $k \geq 1$ 일 때 $x^2 - 2x + 2 - k = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가진다

⑤ $x^2 - 6x + a = 0$ 은 $a = 9$ 일 때만 중근을 가진다.

해설

① $25 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 21 > 0$

② $0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$

③ $(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = m(m - 4) = 0$

⑤ $9 - 1 \cdot a = 9 - a = 0, a = 9$

$\Rightarrow$ ④ $(-1)^2 - 1 \cdot (2 - k) = k - 1 > 0 \therefore k > 1$

18. 이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$ 이 중근을 가질 때, 실수 k 의 값은?

① 1

② 3

③ 6

④ 9

⑤ 36

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1 \cdot k = 0$$

$$\therefore k = 9$$

19. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (a-1)x + \frac{1}{4}a^2 + a - 2 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 실수 a 의 조건을 구하면?

- ① $a > 1$ ② $a < \frac{3}{2}$ ③ $a < \frac{3}{4}$ ④ $a > \frac{3}{4}$ ⑤ $a < 2$

해설

판별식을 D 라고 하면,

$$D = (a-1)^2 - 4\left(\frac{1}{4}a^2 + a - 2\right) = -6a + 9$$

서로 다른 두 실근을 가지려면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$-6a + 9 > 0 \text{에서 } a < \frac{3}{2}$$

20. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 6x + 2k - 1 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $k < -2$

② $-1 < k < 0$

③ $-1 < k < 4$

④ $k < 5$

⑤ $0 < k < 5$

해설

$x^2 - 6x + 2k - 1 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = 9 - 2k + 1 > 0 \quad \therefore 2k < 10 \quad \therefore k < 5$$

21. x 에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2 + 2kx + k-1 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k 의 최솟값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

(i) 이차방정식이므로 x^2 의 계수는 $k-1 \neq 0$ 이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} > 0$ 이어야
하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k-1)^2 > 0, \quad 2k-1 > 0$$

$$\therefore k > \frac{1}{2}$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 2이다.

22. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖은 것의 개수는?

㉠ $3x^2 - x - 1 = 0$

㉡ $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$

㉢ $2x^2 - \sqrt{3}x + 2 = 0$

㉣ $x^2 - x + 2 = 0$

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

㉠ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 13 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉡ $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$ 이므로 중근을 갖는다.

㉢ $D = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -13 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉣ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

23. 이차방정식 $x^2 - 2x + m = 0$ 이 허근을 가질 때, 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < 1$

② $-1 < m < 1$

③ $m < -1$ 또는 $m > 1$

④ $m > 1$

⑤ $m > -1$

해설

주어진 이차방정식이 허근을 가지려면

$$D/4 = 1 - m < 0$$

$$\therefore m > 1$$

24. x 에 대한 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ax^2 + 2bx + c = 0$

㉡ $ax^2 + \frac{1}{2}bx + c = 0$

㉢ $cx^2 + bx + a = 0$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$$D = b^2 - 4ac > 0 \dots$$

㉠ $ax^2 + 2bx + c = 0$ 의 판별식은

$$D = (2b)^2 - 4ac = 4b^2 - 4ac$$

$$= 3b^2 + (b^2 - 4ac > 0)$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉡ [반례] $a = 1, b = 3, c = 2$ 일 때

$x^2 + 3x + 2 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖지만

$x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$ 은 허근을 갖는다.

㉢ $cx^2 + bx + a = 0$ 의 판별식은

$$D = b^2 - 4ac > 0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

25. 이차방정식 $2x^2 - 4x - 3k = 0$ 이 허근을 갖고, 동시에 $x^2 + 5x - 2k = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 정수 k 의 개수를 구하면?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$2x^2 - 4x - 3k = 0$ 이 허근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4} = 4 + 6k < 0$$

$$\therefore k < -\frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$x^2 + 5x - 2k = 0$ 이 실근을 가질 조건은

$$D = 25 + 8k \geq 0$$

$$\therefore k \geq -\frac{25}{8} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } -\frac{25}{8} \leq k < -\frac{2}{3}$$

따라서, 정수 $k = -3, -2, -1$

$\therefore$ 정수 k 의 개수는 3개

26. 이차방정식 $x^2 + 2(k - a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\frac{D}{4} = (k - a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$$

$$\therefore -2ka - b + 2 = 0$$

이 식은 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로 k 에 대한 항등식이다.

$$a = 0, b = 2$$

$$\therefore a + b = 2$$

27. 이차방정식 $x^2 + 2(k-m)x + (k^2 - n + 4) = 0$ 이 실수 k 값에 관계없이
중근을 가질 때, 실수 $m+n$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

중근을 가지려면 판별식이 0이다.

$$D' = (k-m)^2 - (k^2 - n + 4) = 0$$

모든 k 에 대해 성립하려면

$$-2m = 0, \text{ 그리고 } m^2 + n - 4 = 0$$

$$\therefore m = 0, \quad n = 4, \quad m + n = 4$$

28. 방정식 $x^2 + 2(k+a)x + k^2 + k + b = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 중근을 갖도록 실수 a, b 의 값을 정할 때, $a + 2b$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\text{준식에서 } \frac{D}{4} = (k+a)^2 - (k^2 + k + b)$$

$$= (2a-1)k + a^2 - b = 0$$

이것이 k 에 대한 항등식이 되어야 하므로

$$2a-1=0, \quad a^2-b=0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a + 2b = 1$$

29. a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2 + 2cx + a-b$ 는 x 의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형

② $a = b$ 인 이등변삼각형

③ $b = c$ 인 이등변삼각형

④ a 가 빗변인 직각삼각형

⑤ c 가 빗변인 직각삼각형

해설

a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$a > 0, b > 0, c > 0$$

따라서, $a + b > 0$ 이므로 준식은 이차식이다.

준식이 완전제곱식이 되려면

$$\text{판별식 } D = 0$$

$$\frac{D}{4} = c^2 - (a+b)(a-b) = 0$$

$$\text{정리하면, } c^2 - a^2 + b^2 = 0$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서, a 가 빗변인 직각삼각형

30. 이차방정식 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x+a)^2 = b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 + 2x + 3 = 0$ 를 완전제곱식으로 고치면

$$(x^2 + 2x + 1) + 2 = 0, \quad (x+1)^2 = -2$$

$$\therefore a = 1, \quad b = -2$$

$$\therefore a - b = 3$$