

1. 다음 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (\square x^2 + \square x + \square) = x + 2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$$\square x^2 + \square x + \square = A \text{ 라 하면}$$

$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div A = x + 2$$

$$\therefore A = (x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (x + 2)$$

$$\therefore A = x^2 + 2x - 1 \text{ 이므로}$$

안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, -1이다.

2. 다음 중 식의 전개가 바르지 않은 것을 고르면?

① $(1-x)(1+x+x^2) = 1-x^3$

② $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) = x^4+x^2y^2+y^4$

③ $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2) = x^4-8x^2+12$

④ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) = a^8-b^8$

⑤ $(a+b-c)(a-b+c) = a^2-b^2-c^2+2bc$

해설

$$\begin{aligned} & (x-3)(x-2)(x+1)(x+2) \\ &= (x^2-x-6)(x^2-x-2) \\ & x^2-x = Y \text{라 놓자.} \\ & (Y-6)(Y-2) = Y^2-8Y+12 \\ & \quad = (x^2-x)^2-8(x^2-x)+12 \\ & \quad = x^4-2x^3-7x^2+8x+12 \end{aligned}$$

3. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$ 를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a , 상수항을 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

- ① 8 ② 15 ③ 24 ④ 36 ⑤ 47

해설

$$\begin{aligned} & (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) \\ &= (x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x=X(\text{치환})) \\ &= (X-2)(X-12) \\ &= X^2-14X+24 \\ &= (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24 \\ &= x^4+2x^3-13x^2-14x+24 \\ \therefore a &= 1+2-13-14+24=0, b=24 \\ \therefore a+b &= 0+24=24 \end{aligned}$$

해설

- ㉠ 각 항 계수의 총합 구하기
 $x=1$ 대입, $a=0$
㉡ 상수항 구하기
 $x=0$ 대입, $b=24$

4. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겹넓이는 52이고, 모서리의 길이의 합은 36이다. 이 상자의 대각선의 길이는?

① 5 ② $\sqrt{29}$ ③ $\sqrt{33}$ ④ 6 ⑤ $\sqrt{42}$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c 라 하면

$$2(ab + bc + ca) = 52$$

$$4(a + b + c) = 36 \rightarrow a + b + c = 9$$

(직육면체 대각선의 길이)

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \sqrt{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)}$$

$$= \sqrt{81 - 52} = \sqrt{29}$$

5. $2x^2 + xy - 3y^2 + 5x + 5y + 2$ 를 인수분해 하면 $(x + ay + b)(2x + cy + d)$ 이다. 이 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 + xy - 3y^2 + 5x + 5y + 2 \\ &= 2x^2 + (y + 5)x - 3y^2 + 5y + 2 \\ &= 2x^2 + (y + 5)x - (y - 2)(3y + 1) \\ &= \{x - (y - 2)\}\{2x + (3y + 1)\} \\ &= (x - y + 2)(2x + 3y + 1) \\ \therefore & a = -1, b = 2, c = 3, d = 1 \end{aligned}$$

6. $x = 1001$ 일 때, $\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

7. 세 다항식 $f(x) = x^2 + x - 2$, $g(x) = 2x^2 + 3x - 2$, $h(x) = x^2 + mx + 8$ 의 최대공약수가 x 의 일차식일 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $m = 6$

해설

$$f(x) = (x+2)(x-1)$$

$$g(x) = (x+2)(2x-1) \text{ 이므로}$$

$f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수는 $x+2$

이것이 $h(x)$ 의 약수이어야 하므로

$$h(-2) = 4 - 2m + 8 = 0$$

$$\therefore m = 6$$

8. 두 다항식 A, B 의 최대공약수 G 를 $A \cdot B$, 최소공배수 L 을 $A \star B$ 로 나타내기로 한다. 다음 중 $(A^2 \cdot B^2) \star (A^2 \cdot AB)$ 와 같은 것은?

- ① 1 ② A ③ AB ④ AL ⑤ AG

해설

$A = aG, B = bG$ (a, b 는 서로소)라 하면

$$A^2 \cdot B^2 = a^2G^2 \cdot b^2G^2 = G^2$$

$$A^2 \cdot AB = a^2G^2 \cdot abG^2 = aG^2$$

$$\therefore (A^2 \cdot B^2) \star (A^2 \cdot AB) = G^2 \star aG^2 = aG^2 = AG$$

9. $\frac{2005^3 + 1}{2005 \times 2004 + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

2005 = x 로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{x^3 + 1^3}{x(x-1) + 1} \\ &= \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} \\ &= x + 1 \\ &= 2006\end{aligned}$$

10. 2가 아닌 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{ax^2+4x+b}{x-2}$ 의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a-b$ 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}\frac{ax^2+4x+b}{x-2} &= k \text{라 하면} \\ ax^2+4x+b &= k(x-2) \\ ax^2+(4-k)x+b+2k &= 0 \\ x \text{에 대한 항등식이므로} \\ a &= 0 \\ 4-k &= 0 \text{에서 } k=4 \\ b+2k &= 0 \text{에서 } b=-8 \\ \therefore a-b &= 8\end{aligned}$$

해설

주어진 식이 모든 x 에 대해 일정한 값을 가지려면 분자인 ax^2+4x+b 가 분모인 ' $x-2$ ' 만을 인수로 가져야 한다. 즉, 분자가 $k(x-2)$ 가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}\frac{ax^2+4x+b}{x-2} &= \frac{4(x-2)}{x-2} = 4 \\ \therefore a=0, b &= -8 \text{에서 } a-b=8\end{aligned}$$

11. $x + y + 2z = 1$, $2x - y + z = 5$ 를 만족하는 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$ 이 성립할 때, $3a + 2b + c$ 의 값은 얼마인가?

- ① 12 ② 8 ③ 4 ④ 0 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 1 \cdots ① \\2x - y + z &= 5 \cdots ② \\① + ②: x + z &= 2 \Rightarrow z = 2 - x \\② \times 2 - ①: x - y &= 3 \Rightarrow y = x - 3 \\∴ ax^2 + by^2 + cz^2 &= 6 \\⇒ ax^2 + b(x - 3)^2 + c(2 - x)^2 \\&= (a + b + c)x^2 - (4c + 6b)x + 9b + 4c = 6 \\모든 실수 x, y, z 에 대해 성립하려면 \\ $a + b + c = 0$, $4c + 6b = 0$, $9b + 4c = 6$ \\위의 식을 연립하여 풀면, $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$ \\∴ $3a + 2b + c = 4$ \end{aligned}$$

12. 삼각형의 세변의 길이를 x, y, z 라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

- ① x 가 빗변인 직각삼각형
- ② y 가 빗변인 직각삼각형
- ③ z 가 빗변인 직각삼각형
- ④ $x = y$ 인 이등변삼각형
- ⑤ $x = y, z$ 가 빗변인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned} & (x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z \\ &= \{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\}z \\ &= (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z \\ &\therefore (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z = 0 \\ &x^2 + z^2 - y^2 = 0 \quad (\because x, y, z \text{는 모두 양수}) \\ &\therefore x^2 + z^2 = y^2 \Rightarrow y \text{가 빗변인 직각삼각형} \end{aligned}$$

13. $198^3 + 200^3 + 202^3 - 3 \cdot 198 \cdot 200 \cdot 202$ 를 간단히 하면?

- ① 6800 ② 7000 ③ 7200 ④ 7400 ⑤ 7600

해설

$$\begin{aligned} &198 = x, 200 = y, 202 = z \text{라 하면} \\ &198^3 + 200^3 + 202^3 - 3 \cdot 198 \cdot 200 \cdot 202 \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} \\ &= \frac{1}{2} \times 600 \times 24 \\ &= 7200 \end{aligned}$$

14. $a(a+1) = 1$ 일 때, $\frac{a^6-1}{a^4-a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$$\begin{aligned}\frac{a^6-1}{a^4-a^2} &= \frac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)} \\ &= \frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2 = 1-a \text{ 대입} \\ &= \frac{2(1-a) \times 2}{1-a} = 4\end{aligned}$$

15. $a - b = 1$ 이고, $a^2 + b^2 = -1$ 일 때, $a^{14} + b^{20}$ 의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} b = a - 1 \text{을 } a^2 + b^2 = -1 \text{에 대입하면} \\ a^2 - a + 1 = 0 \text{에서 } a^3 = -1 \\ a = b + 1 \text{을 } a^2 + b^2 = -1 \text{에 대입하면} \\ b^2 + b + 1 = 0 \text{에서 } b^3 = 1 \\ a^{14} + b^{20} &= (a^3)^4 \times a^2 + (b^3)^6 \times b^2 \\ &= a^2 + b^2 = -1 \end{aligned}$$

16. 다항식 $x^{2005} + x^5 + x^3 + 1$ 을 삼차식 $x^3 + x^2 + x + 1$ 로 나누었을 때의 나머지는?

- ① $x^2 - 3$ ② $x^2 + x - 2$ ③ $-x^2 - 1$
 ④ $-x^2 + x$ ⑤ $x - 1$

해설

$x^{2005} + x^5 + x^3 + 1 = (x^3 + x^2 + x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c =$
 $(x+1)(x^2+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$ 양변에 $x = -1$ 을 대입하면
 $a - b + c = -2 \cdots \textcircled{A}$
 $(x^2)^{1002} \times x + (x^2)^2 \times x + x^2 \times x + 1$
 $= (x+1)(x^2+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$ 에서
 양변에 $x^2 = -1$ 을 대입하면
 $x + x - x + 1 = -a + bx + c$
 $x + 1 = bx + c - a$
 $\therefore b = 1, c - a = 1 \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서 $a = -1, b = 1, c = 0$
 \therefore 구하는 나머지는 $-x^2 + x$

해설

$x^{2005} + x^5 + x^3 + 1$
 $= (x^3 + x^2 + x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$
 $= (x+1)(x^2+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$
 양변에 $x^2 = -1$ 을 대입하면 좌변이 $x + 1$
 즉, 좌변의 식을 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 1$
 따라서 $ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + x + 1$
 $x^{2005} + x^5 + x^3 + 1$
 $= (x+1)(x^2+1)Q(x) + a(x^2+1) + x + 1$
 $= (x^2+1)\{(x+1)Q(x) + a\} + x + 1$
 양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $-2 = 2a$
 $\therefore a = -1$
 \therefore 구하는 나머지는 $-x^2 + x$

17. 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 2차의 다항식 $f(x)$ 의 개수는?

(가) $f(0) = -1$
(나) $f(x^2)$ 은 $f(x)$ 로 나누어 떨어진다.

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 없다.

해설

$f(0) = -1$ 이므로
 $f(x) = ax^2 + bx - 1$ ($a \neq 0$)라 하면
 $f(x^2) = ax^4 + bx^2 - 1$ 이다.
 $f(x^2)$ 이 $f(x)$ 로 나누어 떨어지므로
그 몫을 $x^2 + cx + 1$ 이라 하면,
 $(ax^4 + bx^2 - 1) = (ax^2 + bx - 1)(x^2 + cx + 1)$
이 항등식이 되어야 한다.
계수비교에 의해 $ac + b = 0 \dots \text{㉠}$
 $a + bc - 1 = b \dots \text{㉡}$
 $b - c = 0 \dots \text{㉢}$
㉢에서 $c = b$, 이를 ㉠에 대입하면 $b(a + 1) = 0$
 $\therefore b = 0$ 또는 $a = -1$
(i) $b = 0$ 이면 ㉡에서 $a = 1$
(ii) $a = -1$ 이면 ㉡, ㉢에서 $b^2 - b - 2 = 0$
 $\therefore b = 2$ 또는 -1
 $\therefore (a, b) = (1, 0), (-1, 2), (-1, -1)$ 의 3 쌍

18. x 에 대한 다항식 $(1+x-x^2)^{10}$ 을 전개하면 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{20}x^{20}$ 이 될 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{20}$ 의 값은? (단, a_i 는 상수이고 $i = 0, 1, 2, \dots, 20$)

① 2^{10}

② $2^{10} - 1$

③ 2

④ 1

⑤ 0

해설

$(1+x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{20}x^{20}$ 이므로
 $x = 1$ 을 대입하면
 $1 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{19} + a_{20} \dots \textcircled{㉠}$
또, 이 식에 $x = -1$ 을 대입하면
 $1 = a_0 - a_1 + a_2 - \dots - a_{19} + a_{20} \dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 을 하면 $2 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{20})$
 $\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = 1$

19. x 에 대한 항등식 $x^{1997} + x + 1$ 을 $x^2 - 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q(x)$ 의 모든 계수와 상수항의 합을 구하면?

- ① 997 ② 998 ③ 1997 ④ $\frac{1997}{2}$ ⑤ $\frac{1997}{3}$

해설

$$x^{1997} + x + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b \text{라 하면}$$

$$x = 1 \text{일 때, } 3 = a + b$$

$$x = -1 \text{일 때, } -1 = -a + b$$

$$\therefore a = 2, b = 1$$

$$\therefore x^{1997} + x + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + 2x + 1$$

$$x^{1997} - x = (x^2 - 1)Q(x)$$

$$x(x-1)(x^{1995} + x^{1994} + \cdots + x + 1)$$

$$= (x-1)(x+1)Q(x)$$

$$\therefore x(x^{1995} + x^{1994} + \cdots + x + 1) = (x+1)Q(x)$$

$Q(1)$ 이 $Q(x)$ 의 모든 계수의 합이므로 $x = 1$ 을 대입하면

$$2Q(1) = 1996 \quad \therefore Q(1) = \frac{1996}{2} = 998$$

20. 다항식 $f(x)$ 를 $x-k$ 로 나눈 몫과 나머지를 $Q_1(x), R_1$ 이라 하고 $Q_1(x)$ 를 $x-k$ 로 나눈 몫과 나머지를 $Q_2(x), R_2, \dots, Q_n(x)$ 를 $x-k$ 로 나눈 몫과 나머지를 $Q_{n+1}(x), R_{n+1}$ 이라 할 때, $f(x)$ 를 $(x-k)^n$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 하면, $R(k)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 0
- ② kR_1
- ③ R_1
- ④ $R_1 + R_2 + \dots + R_n$
- ⑤ $R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_n$

해설

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x-k)Q_1(x) + R_1 \\
 Q_1(x) &= (x-k)Q_2(x) + R_2 \\
 &\vdots \\
 Q_n(x) &= (x-k)Q_{n+1}(x) + R_{n+1} \\
 \therefore f(x) &= (x-k)\{(x-k)Q_2(x) + R_2\} + R_1 \\
 &= (x-k)^2Q_2(x) + (x-k)R_2 + R_1 \\
 &= (x-k)^nQ_n(x) + (x-k)^{n-1}R_n + \dots + (x-k)R_2 + R_1 \\
 \therefore R(x) &= (x-k)^{n-1}R_n + \dots + (x-k)R_2 + R_1 \\
 \therefore R(k) &= R_1
 \end{aligned}$$