1. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3+4x^2+3x-2)\div(\square x^2+\square x+\square)=x+2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$\square x^2+\square x+\square=A$라 하면

$(x^3+4x^2+3x-2)\div A=x+2$

$\therefore\ A=(x^3+4x^2+3x-2)\div(x+2)$

$\therefore\ A=x^2+2x-1$이므로

$\square$안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, -1이다.

2. 다음 중 식의 전개가 바르지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① $(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$

② $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$

③ $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)=x^4-8x^2+12$

④ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^8-b^8$

⑤ $(a+b-c)(a-b+c)=a^2-b^2-c^2+2bc$

해설

$(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)$

$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)$

$x^2-x=Y$라 놓자.

$$\begin{aligned}(Y-6)(Y-2)&=Y^2-8Y+12\\&=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12\\&=x^4-2x^3-7x^2+8x+12\end{aligned}$$

3. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a, 상수항을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 8 ② 15 ③ 24 ④ 36 ⑤ 47

해설

$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x=X(\text{치환}))$

$=(X-2)(X-12)$

$=X^2-14X+24$

$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$

$=x^4+2x^3-13x^2-14x+24$

$\therefore\ a=1+2-13-14+24=0,\ b=24$

$\therefore\ a+b=0+24=24$

해설

㉠ 각 항 계수의 총합 구하기

$x=1$ 대입, $a=0$

㉡ 상수항 구하기

$x=0$ 대입, $b=24$

4. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겉넓이는 52이고, 모서리의 길이의 합은 36이다. 이 상자의 대각선의 길이는?

① 5 ② $\sqrt{29}$ ③ $\sqrt{33}$ ④ 6 ⑤ $\sqrt{42}$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c라 하면

$2(ab+bc+ca)=52$

$4(a+b+c)=36 \rightarrow a+b+c=9$

(직육면체 대각선의 길이)

$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{(a+b+c+)^2-2(ab+bc+ca)}$

$=\sqrt{81-52}=\sqrt{29}$

5. $2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$를 인수분해 하면$(x+ay+b)(2x+cy+d)$이다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-3y^2+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-(y-2)(3y+1)$
$=\{x-(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}$
$=(x-y+2)(2x+3y+1)$
$\therefore\ a=-1, b=2, c=3, d=1$

6. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

7. 세 다항식 $f(x)=x^2+x-2$, $g(x)=2x^2+3x-2$, $h(x)=x^2+mx+8$의 최대공약수가 x의 일차식일 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m=6$

해설

$f(x)=(x+2)(x-1)$
$g(x)=(x+2)(2x-1)$ 이므로
$f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수는 $x+2$
이것이 $h(x)$의 약수이어야 하므로
$h(-2)=4-2m+8=0$
$\therefore\ m=6$

8. 두 다항식 A, B의 최대공약수 G를 $A \cdot B$, 최소공배수 L을 $A \bigstar B$로 나타내기로 한다. 다음 중 $(A^2 \cdot B^2) \bigstar (A^2 \cdot AB)$와 같은 것은?

① 1 ② A ③ AB ④ AL ⑤ AG

해설

$A = aG,\ B = bG\ (a,\ b$는 서로소$)$라 하면

$A^2 \cdot B^2 = a^2G^2 \cdot b^2G^2 = G^2$

$A^2 \cdot AB = a^2G^2 \cdot abG^2 = aG^2$

$\therefore (A^2 \cdot B^2) \bigstar (A^2 \cdot AB) = G^2 \bigstar aG^2 = aG^2 = AG$

9. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times 2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005 = x$ 로 놓으면

$$(\text{준 식}) = \frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}$$
$$= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$= x+1$$
$$= 2006$$

10. 2가 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}$의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=k$라 하면

$ax^2+4x+b=k(x-2)$

$ax^2+(4-k)x+b+2k=0$

x에 대한 항등식이므로

$a=0$

$4-k=0$에서 $k=4$

$b+2k=0$에서 $b=-8$

$\therefore\ a-b=8$

해설

주어진 식이 모든 x에 대해 일정한 값을 가지려면
분자인 ax^2+4x+b가 분모인 '$x-2$' 만을 인수로 가져야 한다.
즉, 분자가 $k(x-2)$가 되어야 한다.

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=\dfrac{4(x-2)}{x-2}=4$

$\therefore a=0,\ b=-8$에서 $a-b=8$

11. $x+y+2z=1$, $2x-y+z=5$를 만족하는 모든 실수 x, y, z에 대하여 $ax^2+by^2+cz^2=6$이 성립할 때, $3a+2b+c$의 값은 얼마인가?

① 12 ② 8 ③ 4 ④ 0 ⑤ −2

해설

$x+y+2z=1 \cdots ①$

$2x-y+z=5 \cdots ②$

① + ②: $x+z=2 \Rightarrow z=2-x$

② ×2−① : $x-y=3 \Rightarrow y=x-3$

$\therefore ax^2+by^2+cz^2=6$

$\Rightarrow ax^2+b(x-3)^2+c(2-x)^2$

$=(a+b+c)x^2-(4c+6b)x+9b+4c=6$

모든 실수 x, y, z에 대해 성립하려면

$a+b+c=0,\ 4c+6b=0,\ 9b+4c=6$

위의 식을 연립하여 풀면, $a=1,\ b=2,\ c=-3$

$\therefore\ 3a+2b+c=4$

12. 삼각형의 세변의 길이를 x, y, z라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

① x가 빗변인 직각삼각형

② y가 빗변인 직각삼각형

③ z가 빗변인 직각삼각형

④ $x = y$인 이등변삼각형

⑤ $x = y$, z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z$

$= \{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\}z$

$= (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z$

$\therefore\ (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z = 0$

$x^2 + z^2 - y^2 = 0$ ($\because$ x, y, z는 모두 양수)

$\therefore\ x^2 + z^2 = y^2 \Rightarrow y$가 빗변인 직각삼각형

13. $198^3+200^3+202^3-3\cdot198\cdot200\cdot202$를 간단히 하면?

① 6800 ② 7000 ③ 7200 ④ 7400 ⑤ 7600

해설

$198=x, 200=y, 202=z$라 하면

$198^3+200^3+202^3-3\cdot198\cdot200\cdot202$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$=\frac{1}{2}\times600\times24$

$=7200$

14. $a(a+1)=1$ 일 때, $\dfrac{a^6-1}{a^4-a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\frac{a^6-1}{a^4-a^2}=\frac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)}$$

$$=\frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2=1-a\text{대입}$$

$$=\frac{2(1-a)\times 2}{1-a}=4$$

15. $a-b=1$이고, $a^2+b^2=-1$일 때, $a^{14}+b^{20}$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$b=a-1$을 $a^2+b^2=-1$에 대입하면

$a^2-a+1=0$에서 $a^3=-1$

$a=b+1$을 $a^2+b^2=-1$에 대입하면

$b^2+b+1=0$에서 $b^3=1$

$$\begin{aligned} a^{14}+b^{20} &= (a^3)^4\times a^2+(b^3)^6\times b^2 \\ &= a^2+b^2=-1 \end{aligned}$$

16. 다항식 $x^{2005}+x^5+x^3+1$을 삼차식 x^3+x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지는?

① x^2-3 ② x^2+x-2 ③ $-x^2-1$

④ $-x^2+x$ ⑤ $x-1$

해설

$x^{2005}+x^5+x^3+1=(x^3+x^2+x+1)Q(x)+ax^2+bx+c=$
$(x+1)(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx+c$ 양변에 $x=-1$을 대입하면
$a-b+c=-2\cdots$㉠
$(x^2)^{1002}\times x+(x^2)^2\times x+x^2\times x+1$
$=(x+1)(x^2+1)Qx+ax^2+bx+c$에서
양변에 $x^2=-1$을 대입하면
$x+x-x+1=-a+bx+c$
$x+1=bx+c-a$
$\therefore\ b=1,\ c-a=1\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $a=-1,\ b=1,\ c=0$
$\therefore$구하는 나머지는 $-x^2+x$

해설

$x^{2005}+x^5+x^3+1$
$=(x^3+x^2+x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$
$=(x+1)(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx+c$
양변에 $x^2=-1$을 대입하면 좌변이 $x+1$
즉, 좌변의 식을 x^2+1로 나눈 나머지가 $x+1$
따라서 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1$
$x^{2005}+x^5+x^3+1$
$=(x+1)(x^2+1)Q(x)+a(x^2+1)+x+1$
$=(x^2+1)\{(x+1)Q(x)+a\}+x+1$
양변에 $x=-1$을 대입하면 $-2=2a$
$\therefore\ a=-1$
$\therefore$구하는 나머지는 $-x^2+x$

17. 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 2차의 다항식 $f(x)$의 개수는?

> (가) $f(0) = -1$
>
> (나) $f(x^2)$은 $f(x)$로 나누어 떨어진다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 없다.

해설

$f(0) = -1$이므로
$f(x) = ax^2 + bx - 1$ $(a \neq 0)$라 하면
$f(x^2) = ax^4 + bx^2 - 1$이다.
$f(x^2)$이 $f(x)$로 나누어 떨어지므로
그 몫을 $x^2 + cx + 1$이라 하면,
$(ax^4 + bx^2 - 1) = (ax^2 + bx - 1)(x^2 + cx + 1)$
이 항등식이 되어야 한다.
계수비교에 의해 $ac + b = 0 \cdots$ ㉠
$a + bc - 1 = b \cdots$ ㉡
$b - c = 0 \cdots$ ㉢
㉢에서 $c = b$, 이를 ㉠에 대입하면 $b(a+1) = 0$
$\therefore$ $b = 0$ 또는 $a = -1$
(i) $b = 0$이면 ㉡에서 $a = 1$
(ii) $a = -1$이면 ㉡, ㉢에서 $b^2 - b - 2 = 0$
$\therefore$ $b = 2$ 또는 -1
$\therefore$ $(a, b) = (1, 0), (-1, 2), (-1, -1)$의 3 쌍

18. x에 대한 다항식 $(1+x-x^2)^{10}$을 전개하면 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{20}x^{20}$이 될 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}$의 값은? (단, a_i는 상수이고 $i=0,\ 1,\ 2,\cdots,20$)

① 2^{10} ② $2^{10}-1$ ③ 2

④ 1 ⑤ 0

해설

$(1+x-x^2)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{20}x^{20}$이므로

$x=1$을 대입하면

$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{19}+a_{20}\cdots$ ㉠

또, 이 식에 $x=-1$을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{19}+a_{20}\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $2=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20})$

$\therefore\ a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}=1$

19. x에 대한 항등식 $x^{1997}+x+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$의 모든 계수와 상수항의 합을 구하면?

① 997 ② 998 ③ 1997 ④ $\frac{1997}{2}$ ⑤ $\frac{1997}{3}$

해설

$x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$라 하면

$x=1$일 때, $3=a+b$

$x=-1$일 때, $-1=-a+b$

$\therefore\ a=2,\ b=1$

$\therefore\ x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+2x+1$

$x^{1997}-x=(x^2-1)Q(x)$

$x(x-1)(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)$

$=(x-1)(x+1)Q(x)$

$\therefore\ x(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)=(x+1)Q(x)$

$Q(1)$이 $Q(x)$의 모든 계수의 합이므로 $x=1$을 대입하면

$2Q(1)=1996 \quad \therefore\ Q(1)=\frac{1996}{2}=998$

20. 다항식 $f(x)$를 $x-k$로 나눈 몫과 나머지를 $Q_1(x), R_1$이라 하고 $Q_1(x)$를 $x-k$로 나눈 몫과 나머지를 $Q_2(x), R_2$, $\cdots$, $Q_n(x)$를 $x-k$로 나눈 몫과 나머지를 $Q_{n+1}(x), R_{n+1}$이라 할 때, $f(x)$를 $(x-k)^n$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하면, $R(k)$의 값은 얼마인가?

① 0　　② kR_1

③ R_1　　④ $R_1+R_2+\cdots+R_n$

⑤ $R_1 \cdot R_2 \cdot \cdots \cdot R_n$

해설

$f(x) = (x-k)Q_1(x) + R_1$

$Q_1(x) = (x-k)Q_2(x) + R_2$

$\vdots$

$Q_n(x) = (x-k)Q_{n+1}(x) + R_{n+1}$

$\therefore\ f(x) = (x-k)\{(x-k)Q_2(x) + R_2\} + R_1$

$= (x-k)^2Q_2(x) + (x-k)R_2 + R_1$

$= (x-k)^nQ_n(x) + (x-k)^{n-1}R_n + \cdots + (x-k)R_2 + R_1$

$\therefore\ R(x) = (x-k)^{n-1}R_n + \cdots + (x-k)R_2 + R_1$

$\therefore\ R(k) = R_1$