

1. $\frac{x-2}{2x^2-5x+3} + \frac{3x-1}{2x^2+x-6} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(준 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{x-2}{(2x-3)(x-1)} + \frac{3x-1}{(2x-3)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2} \\ &= \frac{(x-2)(x+2) + (3x-1)(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{4x^2-4x-3}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{(2x-3)(2x+1)}{(2x-3)(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{2x^2+2x-4}{(x+2)(x-1)} = 2 \end{aligned}$$

2. $\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{5}$ 일 때, 유리식 $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ 의 값은?
- ① $\frac{7}{11}$ ② $\frac{9}{11}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{11}{14}$

해설

$$\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{5} = k$$

$$\begin{cases} x+y=3k \cdots \textcircled{㉠} \\ y+z=4k \cdots \textcircled{㉡} \\ z+x=5k \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

① + ② + ③을 하면

$$2(x+y+z) = 12k \quad \therefore x+y+z = 6k \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉢} - \textcircled{㉡} \rightarrow x = 2k$$

$$\textcircled{㉢} - \textcircled{㉠} \rightarrow y = k$$

$$\textcircled{㉢} - \textcircled{㉠} \rightarrow z = 3k$$

$$\begin{aligned} \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} &= \frac{2k^2+3k^2+6k^2}{4k^2+k^2+9k^2} = \frac{11k^2}{14k^2} \\ &= \frac{11}{14} \end{aligned}$$

3. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + m, y + n)$ 에 의하여 분수함수 $y = \frac{x+1}{x}$ 의 그래프가 분수함수 $y = \frac{-x+3}{x-2}$ 의 그래프로 옮겨질 때, $m - n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

분수함수 $y = \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x} + 1$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = \frac{1}{x-m} + 1 + n$ 이 식이

$y = \frac{-x+3}{x-2} = \frac{-(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 1$ 과 같으므로

$m = 2, 1 + n = -1$ 에서 $n = -2$

$\therefore m - n = 4$

4. 유리수 a, b 가 다음 두 조건을 만족할 때, b 의 값은?

$$\textcircled{\text{㉠}} \quad (a + \sqrt{3})(3 + b\sqrt{3}) = -3(1 + \sqrt{3})$$
$$\textcircled{\text{㉡}} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \neq \sqrt{\frac{a}{b}}$$

- ① -3

② -2

③ -1

④ 2

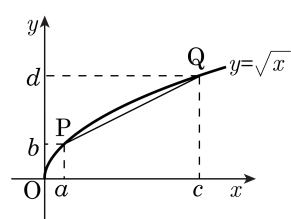
⑤ 3

해설

조건 ㉠에서 좌변을 정리하면
 $(3a+3b)+(ab+3)\sqrt{3} = -3-3\sqrt{3}$ 무리식의 상등에서 $3a+3b = -3, ab+3 = -3$
 $\therefore a+b = -1, ab = -6$
따라서 a, b 는 $x^2+x-6=0$ 의 두 근이다.
 $(x-2)(x+3)=0 \quad \therefore x=2, -3$
조건 ㉡에서 $a > 0, b < 0$ 이므로 $b = -3$

5. 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $P(a, b), Q(c, d)$ 에 대하여 $\frac{b+d}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ 의 기울기를 구하면? (단, $0 < a < c$)

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1



해설

두 점 $P(a, b), Q(c, d)$ 는

함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점이므로

$$b = \sqrt{a}, d = \sqrt{c}$$

$$\therefore a = b^2, c = d^2$$

따라서 직선 PQ 의 기울기는

$$\frac{d-b}{c-a} = \frac{d-b}{d^2-b^2} = \frac{d-b}{(d-b)(d+b)} = \frac{1}{d+b} \text{ 이고}$$

$$\frac{b+d}{2} = 1 \text{ 에서 } b+d=2 \text{ 이므로}$$

$$(\therefore \text{ 직선 PQ 의 기울기}) = \frac{1}{2}$$

6. $\frac{3x^2 - 2xy}{x^2 + xy + y^2} = 2$ 일 때, $\frac{3(x-y)}{x+y}$ 의 값을 구하면? (단, $x > y > 0$)

① $2\sqrt{6} + 3$

② $2\sqrt{6} - 3$

③ $3 - 2\sqrt{6}$

④ $3 + 2\sqrt{6}$

⑤ $5 - 6\sqrt{2}$

해설

$$3x^2 - 2xy = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

$\therefore x^2 - 4xy - 2y^2 = 0$ 이 식의 양변을 y^2 으로 나누면

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{y}\right) - 2 = 0$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 2 + \sqrt{6} \quad (\because x > y > 0 \text{에서 } \frac{x}{y} > 1)$$

$$\therefore \frac{3(x-y)}{x+y} = \frac{3\left(\frac{x}{y} - 1\right)}{\frac{x}{y} + 1} = 2\sqrt{6} - 3$$

7. 어느 해 A대 입시에서 전체 지원자 중 550명이 합격했다. 지원자의 남녀의 비가 8 : 5, 합격자의 남녀의 비가 7 : 4, 불합격자의 남녀의 비가 3 : 2라 할 때, 총 지원자의 수를 구하면?

- ① 1200 ② 1250 ③ 1300 ④ 1350 ⑤ 1400

해설

문제의 조건을 비례상수를 이용하여 다음과 같이 표로 만들어 보자.

	지원자의 수	합격자의 수	불합격자의 수
남	$8k$	$7s$	$3t$
여	$5k$	$4s$	$2t$

이때, $8k = 7s + 3t$, $5k = 4s + 2t$ 이고,

두 식에서 $k = 2s$

한편, $7s + 4s = 11s = 550$

$\therefore s = 50$

따라서, 총 지원자의 수는 $8k + 5k = 13k = 26s = 26 \times 50 = 1300$ (명)

8. 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \frac{2x-4}{-x+3}$ 일 때, 함수 $y = |x+a| + b + c$ 의 최솟값은?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

f^{-1} 의 역함수가 f 이므로 $f(x) = (f^{-1})^{-1}(x)$

$y = f^{-1}(x) = \frac{2x-4}{-x+3}$ 를

x 에 대하여 풀면, $x = \frac{3y+4}{y+2}$

x 와 y 를 바꾸면, $y = f(x) = \frac{3x+4}{x+2}$

$f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 이므로 $a = 3, b = 4, c = 2$

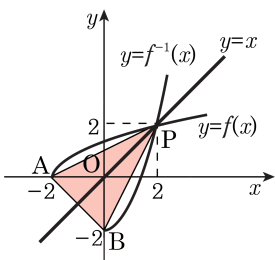
함수 $y = |x+3| + 6$ 은 $x = -3$ 일 때, 최솟값 6을 갖는다.

9. $\langle x \rangle = x - [x]$ 라 할 때,
 $\langle \sqrt{3+2\sqrt{2}} \rangle - \frac{1}{\langle \sqrt{3+2\sqrt{2}} \rangle}$ 의 값은?(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)
- ① $-2\sqrt{2}$ ② -2 ③ -1
 ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{3+2\sqrt{2}} &= \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} \\ &= \sqrt{2}+1 = x \text{라 하자.} \\ [x] &= 2, \langle x \rangle = \sqrt{2}-1 \\ (\text{준식}) &= (\sqrt{2}-1) - \frac{1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \sqrt{2}-1 - (\sqrt{2}+1) = -2\end{aligned}$$

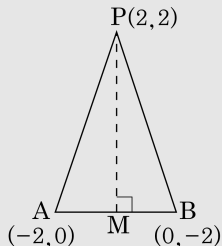
10. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x+2}$ 에 대하여 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점을 A, $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프와 y 축이 만나는 점을 B라 하자. $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 만나는 교점을 P라고 할 때, 삼각형 ABP의 넓이를 구하면?



- ① 5 ② 6 ③ $4\sqrt{2}$
 ④ 8 ⑤ 10

해설

$y = f(x) = \sqrt{x+2}$ 의 정의역은 $\{x \mid x \geq -2\}$, 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 $x = \sqrt{y+2}$
 y 에 관하여 정리하면 $y = x^2 - 2$
 따라서 $y = f^{-1}(x) = x^2 - 2$ 이고,
 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$, 치역은 $\{y \mid y \geq -2\}$
 이때, $y = f(x)$ 와
 $y = f^{-1}(x)$ 의 교점은
 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의
 교점과 같다.



$\sqrt{x+2} = x, x+2 = x^2$
 $x^2 - x - 2 = 0,$
 $x = 2$ 또는 $x = -1$
 $\therefore x = 2, y = 2(\because x > 0)$
 $\therefore P(2, 2)$
 $\overline{AB}$ 의 중점을 M이라 하면 $M(-1, -1)$
 $\triangle ABP$ 는 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 인 이등변삼각형이므로
 $\overline{AB} \perp \overline{PM}$ 이다.
 $\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$
 $\overline{PM} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$
 따라서 $\triangle ABP$ 의 넓이를 S라 하면
 $S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PM} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$