1. $\dfrac{x-2}{2x^2-5x+3}+\dfrac{3x-1}{2x^2+x-6}+\dfrac{2x^2-5}{x^2+x-2}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(준 식)

$$=\frac{x-2}{(2x-3)(x-1)}+\frac{3x-1}{(2x-3)(x+2)}+\frac{2x^2-5}{x^2+x-2}$$

$$=\frac{(x-2)(x+2)+(3x-1)(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+2)}+\frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{4x^2-4x-3}{(2x-3)(x-1)(x+2)}+\frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{(2x-3)(2x+1)}{(2x-3)(x+2)(x-1)}+\frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}+\frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{2x^2+2x-4}{(x+2)(x-1)}=2$$

2. $\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{5}$ 일 때, 유리식 $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ 의 값은?

① $\frac{7}{11}$ ② $\frac{9}{11}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{11}{14}$

해설

$$\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{5}=k$$

$$\begin{cases} x+y=3k\cdots ㉠ \\ y+z=4k\cdots ㉡ \\ z+x=5k\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠ + ㉡ + ㉢을 하면

$2(x+y+z)=12k \quad \therefore x+y+z=6k\cdots$ ㉣

㉣ − ㉡ $\rightarrow x=2k$

㉣ − ㉢ $\rightarrow y=k$

㉣ − ㉠ $\rightarrow z=3k$

$$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{2k^2+3k^2+6k^2}{4k^2+k^2+9k^2}=\frac{11k^2}{14k^2}$$

$$=\frac{11}{14}$$

3. 평행이동 $f:(x,\ y) \to (x+m,\ y+n)$ 에 의하여 분수함수 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 의 그래프가 분수함수 $y=\dfrac{-x+3}{x-2}$ 의 그래프로 옮겨질 때, $m-n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

분수함수 $y=\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1}{x}+1$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 m 만큼,y 축의 방향으로

n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\dfrac{1}{x-m}+1+n$이 식이

$y=\dfrac{-x+3}{x-2}=\dfrac{-(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}-1$ 과 같으므로

$m=2,\ 1+n=-1$ 에서 $n=-2$

$\therefore\ m-n=4$

4. 유리수 a ,b가 다음 두 조건을 만족할 때, b의 값은?

㉠ $(a+\sqrt{3})(3+b\sqrt{3})=-3(1+\sqrt{3})$ ㉡ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\neq\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 2　　⑤ 3

해설

조건 ㉠에서 좌변을 정리하면

$(3a+3b)+(ab+3)\sqrt{3}=-3-3\sqrt{3}$ 무리식의 상등에서 $3a+3b=-3$, $ab+3=-3$

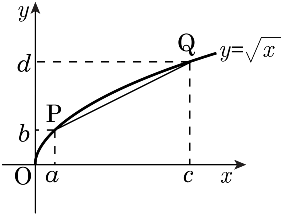
$\therefore\ a+b=-1,\ ab=-6$

따라서 $a,\ b$는 $x^2+x-6=0$의 두 근이다.

$(x-2)(x+3)=0\quad\therefore\ x=2,\ -3$

조건 ㉡에서 $a>0,\ b<0$이므로 $b=-3$

5. 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b), \mathrm{Q}(c,\ d)$ 에 대하여 $\dfrac{b+d}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ 의 기울기를 구하면? (단, $0 < a < c$)



① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$

④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

두 점 $\mathrm{P}(a,\ b),\ \mathrm{Q}(c,\ d)$ 는

함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점이므로

$b = \sqrt{a},\ d = \sqrt{c}$

$\therefore\ a = b^2,\ c = d^2$

따라서 직선 PQ 의 기울기는

$\dfrac{d-b}{c-a} = \dfrac{d-b}{d^2-b^2} = \dfrac{d-b}{(d-b)(d+b)} = \dfrac{1}{d+b}$ 이고

$\dfrac{b+d}{2} = 1$ 에서 $b+d = 2$ 이므로

$(\therefore$ 직선 PQ 의 기울기$) = \dfrac{1}{2}$

6. $\dfrac{3x^2-2xy}{x^2+xy+y^2}=2$일 때, $\dfrac{3(x-y)}{x+y}$의 값을 구하면? (단, $x>y>0$)

① $2\sqrt{6}+3$　② $2\sqrt{6}-3$　③ $3-2\sqrt{6}$

④ $3+2\sqrt{6}$　⑤ $5-6\sqrt{2}$

해설

$3x^2-2xy=2x^2+2xy+2y^2$

$\therefore\ x^2-4xy-2y^2=0$ 이 식의 양변을 y^2 으로 나누면

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-4\left(\frac{x}{y}\right)-2=0$$

$\therefore\ \dfrac{x}{y}=2+\sqrt{6}$ ($\because$ $x>y>0$에서 $\dfrac{x}{y}>1$)

$$\therefore\ \frac{3(x-y)}{x+y}=\frac{3\left(\frac{x}{y}-1\right)}{\frac{x}{y}+1}=2\sqrt{6}-3$$

7. 어느 해 A대 입시에서 전체 지원자 중 550명이 합격했다. 지원자의 남녀의 비가 8 : 5, 합격자의 남녀의 비가 7 : 4, 불합격자의 남녀의 비가 3 : 2라 할 때, 총 지원자의 수를 구하면?

① 1200 ② 1250 ③ 1300 ④ 1350 ⑤ 1400

해설

문제의 조건을 비례상수를 이용하여 다음과 같이 표로 만들어 보자.

	지원자의 수	합격자의 수	불합격자의 수
남	$8k$	$7s$	$3t$
여	$5k$	$4s$	$2t$

이때, $8k = 7s + 3t$, $5k = 4s + 2t$이고,

두 식에서 $k = 2s$

한편, $7s + 4s = 11s = 550$

$\therefore\ s = 50$

따라서, 총 지원자의 수는 $8k + 5k = 13k = 26s = 26 \times 50 = 1300$(명)

8. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{2x-4}{-x+3}$ 일 때, 함수 $y=|x+a|+b+c$ 의 최솟값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

f^{-1} 의 역함수가 f 이므로 $f(x)=(f^{-1})^{-1}(x)$

$y=f^{-1}(x)=\dfrac{2x-4}{-x+3}$ 를

x에 대하여 풀면, $x=\dfrac{3y+4}{y+2}$

x와 y를 바꾸면, $y=f(x)=\dfrac{3x+4}{x+2}$

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 이므로 $a=3,\ b=4,\ c=2$

함수 $y=|x+3|+6$은 $x=-3$일 때, 최솟값 6을 갖는다.

9. $< x >= x - [x]$ 라 할 때,

$< \sqrt{3+2\sqrt{2}} > - \dfrac{1}{< \sqrt{3+2\sqrt{2}} >}$ 의 값은?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① $-2\sqrt{2}$　　② -2　　③ -1

④ 2　　⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}$$

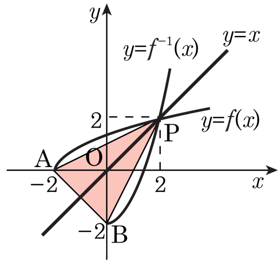
$= \sqrt{2}+1 = x$라 하자.

$[x] = 2,\ < x >= \sqrt{2}-1$

$$(\text{준식}) = (\sqrt{2}-1) - \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \sqrt{2}-1-(\sqrt{2}+1) = -2$$

10. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x+2}$에 대하여 $y = f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점을 A, $y = f^{-1}(x)$의 그래프와 y축이 만나는 점을 B라 하자. $y = f(x)$와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 교점을 P라고 할 때, 삼각형 ABP의 넓이를 구하면?



① 5　　② 6　　③ $4\sqrt{2}$

④ 8　　⑤ 10

해설

$y = f(x) = \sqrt{x+2}$ 의 정의역은 $\{x \mid x \geq -2\}$, 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$

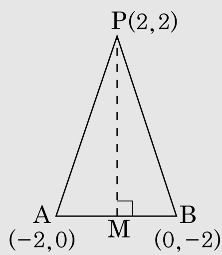
x 와 y 를 서로 바꾸면 $x = \sqrt{y+2}$

y 에 관하여 정리하면 $y = x^2 - 2$

따라서 $y = f^{-1}(x) = x^2 - 2$이고,

정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$, 치역은 $\{y \mid y \geq -2\}$

이때, $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$의 교점은 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 교점과 같다.



$\sqrt{x+2} = x,\ x+2 = x^2$

$x^2 - x - 2 = 0$,

$x = 2$ 또는 $x = -1$

$\therefore x = 2,\ y = 2(\because x > 0)$

$\therefore \mathrm{P}(2,\ 2)$

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\ (-1,\ -1)$

$\triangle\mathrm{ABP}$는 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AB}} \perp \overline{\mathrm{PM}}$ 이다.

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PM}} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

따라서 $\triangle\mathrm{ABP}$ 의 넓이를 S라 하면

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{PM}} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$$