

1. 100개의 다항식 $x^2 - x - 1, x^2 - x - 2, \dots, x^2 - x - 100$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해되는 것은 모두 몇 개인가?

① 5개

② 7개

③ 9개

④ 11개

⑤ 13개

해설

$x^2 - x - n = (x + a)(x - b)$ (a, b 는 자연수)라 하면
 $b = a + 1, ab = n$ ($1 \leq n \leq 100$)

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n=ab$	2	6	12	20	30	42	56	72	90

$\therefore$ 9(개)

2. 다음 중 인수분해가 잘못된 것을 고르면?

① $(x-y)^2 - xy(y-x) = (x-y)(x-y+xy)$

② $3a^2 - 27b^2 = 3(a+3b)(a-3b)$

③ $64a^3 - 125 = (4a+5)(16a^2 - 20a + 25)$

④ $(x^2 - x)(x^2 - x + 1) - 6 = (x^2 - x + 3)(x+1)(x-2)$

⑤ $2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3)$

해설

$$\begin{aligned} & 64a^3 - 125 \\ &= (4a)^3 - (5)^3 \\ &= (4a-5)(16a^2 + 20a + 25) \end{aligned}$$

3. $16a^4 - 250ab^3$ 의 인수가 아닌 것은?

① a

② $2a - 5b$

③ $2a(2a - 5b)$

④ $4a^2 + 10ab + 25b^2$

⑤ $2a(2a + 5b)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 2a(8a^3 - 125b^3) \\&= 2a\{(2a)^3 - (5b)^3\} \\&= 2a(2a - 5b)(4a^2 + 10ab + 25b^2)\end{aligned}$$

4. 다음 중 $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x + y$

② $-x - y$

③ $x + y - 2$

④ $x - y$

⑤ $2x + 2y$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= (x^2 + 2xy + y^2) - 2(x + y) \\&= (x + y)^2 - 2(x + y) \\&= (x + y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned}(x + y)(x + y - 2) &= -(-x - y)(x + y - 2) \\&= \frac{1}{2}(2x + 2y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

5. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$x^2 + x = A$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} & (x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24 \\ &= \{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24 \\ &= (x^2+x-2)(x^2+x-12)+24 \\ &= (A-2)(A-12)+24 \\ &= A^2-14A+48=(A-6)(A-8) \\ &= (x^2+x-6)(x^2+x-8) \\ &= (x-2)(x+3)(x^2+x-8) \\ &\therefore a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10 \end{aligned}$$

6. $(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 2) - 24$ 를 인수분해하면 $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 일 때 $a + b + c + d$ 를 구하면?

- ① 16 ② -16 ③ 15 ④ 18 ⑤ 0

해설

$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 2) - 24$ 에서

$x^2 + 5x = t$ 로 치환하면

$$(\text{준식}) = (t + 4)(t + 2) - 24$$

$$= t^2 + 6t + 8 - 24 = t^2 + 6t - 16$$

$$= (t + 8)(t - 2)$$

이 때 $t = x^2 + 5x$ 이므로

$$\therefore (x^2 + 5x + 8)(x^2 + 5x - 2)$$

$$\therefore a = 5, b = 8, c = 5, d = -2$$

$$a + b + c + d = 5 + 8 + 5 + (-2) = 16$$

7. 다항식 $x^4 + x^2y^2 + 25y^4$ 을 인수분해 하였더니 $(x^2 + mxy + 5y^2)(x^2 + nxy + 5y^2)$ 가 되었다. 이 때 상수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값을 구하면?

① -6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 10x^2y^2 + 25y^4 - 9x^2y^2 \\&= (x^2 + 5y^2)^2 - (3xy)^2 \\&= (x^2 + 5y^2 - 3xy)(x^2 + 5y^2 + 3xy)\end{aligned}$$

$$\therefore m + n = 0$$

8. $x^6 + 1$ 을 계수가 실수인 범위 내에서 인수분해 할 때, 다음 중 인수인 것은?

① $x^2 + x + 1$

② $x^2 - x + 1$

③ $x^2 + \sqrt{3}x + 1$

④ $x^2 + \sqrt{3}x - 1$

⑤ $x^2 - 1$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2)^3 + 1 \\&= (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \\&= (x^2 + 1)\{(x^2 + 1)^2 - 3x^2\} \\&= (x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)\end{aligned}$$

9. 다항식 $x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 3y - 2$ 를 일차식의 곱으로 인수분해 하였을 때, 그 인수들의 합을 구하면?

① $x + 2y + 1$

② $x + y - 3$

③ $2x + 3y + 2$

④ $x + y - 2$

⑤ $2x + 3y - 1$

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 3y - 2 \\ &= x^2 + (3y - 1)x + 2y^2 - 3y - 2 \\ &= x^2 + (3y - 1)x + (y - 2)(2y + 1) \\ &= (x + y - 2)(x + 2y + 1) \end{aligned}$$

10. $2x^2 + xy - 3y^2 + 5x + 5y + 2$ 를 인수분해 하면 $(x + ay + b)(2x + cy + d)$ 이다. 이 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 + xy - 3y^2 + 5x + 5y + 2 \\ &= 2x^2 + (y + 5)x - 3y^2 + 5y + 2 \\ &= 2x^2 + (y + 5)x - (y - 2)(3y + 1) \\ &= \{x - (y - 2)\}\{2x + (3y + 1)\} \\ &= (x - y + 2)(2x + 3y + 1) \\ &\therefore a = -1, b = 2, c = 3, d = 1 \end{aligned}$$

11. 다음 중 $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24$ 를 인수분해 하였을 때, 인수가 아닌 것은?

① $x - 1$

② $x - 2$

③ $x + 3$

④ $x + 4$

⑤ $x - 4$

해설

$f(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24$ 라 하면

$f(1) = f(2) = 0$ 이므로

$f(x)$ 는 $x - 1, x - 2$ 를 인수로 갖는다.

조립제법을 해 보면 즉,

$$x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24$$

$$= (x - 1)(x - 2)(x^2 - x - 12)$$

$$= (x - 1)(x - 2)(x - 4)(x + 3)$$

12. 다음 중 $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x - 1$

② $x + 1$

③ $x - 3$

④ $x + 3$

⑤ $x + 2$

해설

준식을 인수정리와 조립제법을 이용하여 정리하면

$$(x - 1)(x - 3)(x + 2)(x + 3) = 0$$

※ 최고차항의 계수가 1인 다항식에서 인수정리를 사용할 때,
상수항의 약수 중에서 대입하여 0이 되는 정수를 찾아본다.

13. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$ 을 인수분해 했을 때 인수가 아닌 것은?

① $x - 1$

② $x + 1$

③ $x + 2$

④ $(x - 1)^2$

⑤ $(x + 1)^2$

해설

조립제법을 이용한다.

1	1	1	-3	-1	2	
		1	2	-1	-2	
1	1	2	-1	-2	0	
		1	3	2		
-1	1	3	2	0		
		-1	-2			
-2	1	2	0			
		-2				
		1	0			

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = (x - 1)^2(x + 1)(x + 2)$$

14. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$$[x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y]$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} & x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y \\ &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) + xy(x-y) + 2(x+y)(x-y) + (x-y) \\ &= (x-y)\{(x+y)^2 + 2(x+y) + 1\} \\ &= (x-y)(x+y+1)^2 \\ & p = -1, q = 1, r = 1 \\ & \therefore p^2 + q^2 + r^2 = 3 \end{aligned}$$

15. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - k$ 가 이차식의 완전제곱식으로 인수분해될 때, 상수 k 의 값을 정하면?

① -1

② 1

③ 0

④ 2

⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - k \\ &= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) - k \\ &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - k \\ & \quad x^2 + 5x = X \text{로 치환하면} \\ & (\text{준식}) = (X+4)(X+6) - k \\ & \quad = X^2 + 10X + 24 - k \\ & \text{완전제곱식이 되려면 } 24 - k = 25 \\ & \therefore k = -1 \end{aligned}$$

16. $x^4 - 6x^2 + 1$ 을 인수분해 하였더니 $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 가 되었다.
이 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하면?

① -2

② 2

③ -1

④ 1

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 6x^2 + 1 &= (x^4 - 2x^2 + 1) - 4x^2 \\&= (x^2 - 1)^2 - (2x)^2 \\&= (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1) \\&= (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \\ \therefore a + b + c + d &= -2\end{aligned}$$

17. 다음 중 다항식 $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a - b$

② $b - c$

③ $c - a$

④ $a + b + c$

⑤ $a - b + c$

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^3(b-c) - a(b^3 - c^3) + bc(b^2 - c^2) \\&= (b-c)\{a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b+c)\} \\&= (b-c)\{b^2(c-a) + b(c^2 - ca) - a(c^2 - a^2)\} \\&= (b-c)(c-a)(b^2 + bc - ac - a^2) \\&= (b-c)(c-a)\{c(b-a) + (b^2 - a^2)\} \\&= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)\end{aligned}$$