1. 두 복소수 $z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 에 대하여 $z_1+(2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=8$

해설

$z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 를

$z_1+(2-4i) = z_2$ 에 대입하면

$1+(a-2)i+(2-4i) = (b-2)-ai$

$3+(a-6)i = (b-2)-ai$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3 = b-2$, $a-6 = -a$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$b=5,\ a=3$

$\therefore\ a+b=8$

2. $x = 1 + 2i$, $y = \dfrac{1+2i}{1-i}$, $z = \dfrac{1-2i}{1-i}$ 일 때, $xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1 + 3i$ ② $-1 - 2i$ ③ $-1 + 2i$

④ $-1 - i$ ⑤ $-1 + i$

해설

$x = 1 + 2i,\ y = \dfrac{1+2i}{1-i},\ z = \dfrac{1-2i}{1-i}$

$$\begin{aligned} \therefore\ xy + xz &= \frac{(1+2i)^2}{1-i} + \frac{(1-2i)(1+2i)}{1-i} \\ &= \frac{-3+4i+5}{1-i} \\ &= \frac{2+4i}{1-i} \\ &= -1 + 3i \end{aligned}$$

3. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2008}$ 을 간단히 하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{2i}{2} = i$$
$$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2008} = i^{2008}$$
$$= (i^4)^{502} = 1$$

4. $x = 1 + \sqrt{2}i,\ y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

① -1　　② 1　　③ -2　　④ 2　　⑤ -3

해설

$x + y = 2,\ xy = 3$

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4 - 6 = -2$

5. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 결레복소수이다.)

보기

ㄱ $z \cdot \bar{z}$는 실수이다.

ㄴ $z+\bar{z}$는 실수이다.

ㄷ $z-\bar{z}$는 허수이다.

ㄹ $(z+1)(\bar{z}+1)$은 실수이다.

① ㄱ, ㄴ　　② ㄱ, ㄹ　　③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄴ, ㄹ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로

ㄱ $z \cdot \bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ (실수)

ㄴ $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)

ㄷ $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$

$b=0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

ㄹ $(z+1)(\bar{z}+1)=(a+bi+1)(a-bi+1)$

$$=(a+1+bi)(a+1-bi)$$

$$=(a+1)^2+b^2 \text{ (실수)}$$

6. 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}=13$, $z+\bar{z}=4$ 일 때, 복소수 z 는? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $2-2i$ ② $2\pm3i$ ③ $2\pm\sqrt{3}i$

④ $3\pm2i$ ⑤ $4\pm3i$

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로

$z\bar{z}=13$, $z+\bar{z}=4$ 에서

$(a+bi)(a-bi)=13$, $(a+bi)+(a-bi)=4$

$a^2+b^2=13$, $2a=4$

$\therefore\ A=2,\ b=\pm3$

$z=2\pm3i$

7. $x = -2 - i$ 일 때, $x^2 + 4x + 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x = -2 - i$ 에서 $x + 2 = -i$ 의 양변을 제곱하면

$(x+2)^2 = (-i)^2$ 이므로

$x^2 + 4x = -5$

$\therefore \ x^2 + 4x + 10 = -5 + 10 = 5$

8. $2|x-1|+x-4=0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

i) $x<1$일 때,

$-2(x-1)+(x-4)=0$

$\therefore x=-2$

ii) $x \geq 1$일 때,

$2(x-1)+x-4=0$

$\therefore x=2$

따라서 구하는 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이다.

9. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
(2) $x^2-3\sqrt{2}x+6=0$

① (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
② (1) $\frac{3\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
③ (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{6}i}{2}$
④ (1) $\frac{1\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
⑤ (1) $\frac{4\pm 3i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$

$\therefore\ 5x^2-8x+4=0$

$$\therefore\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{5}=\frac{4\pm 2i}{5}$$

(2) $$x=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-24}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$$

10. 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 4 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 상수 k 값들의 합은?

① 1 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 2

해설

중근을 가지려면 판별식 $D = 0$

$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 4 = 0$

$k^2 - 2k - 3 = 0$, $(k-3)(k+1) = 0$

$\therefore\ k = 3, -1$

11. 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x+a)^2=b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

$x^2+2x+3=0$ 를 완전제곱식으로 고치면

$(x^2+2x+1)+2=0, \quad (x+1)^2=-2$

$\therefore a=1,\ b=-2$

$\therefore a-b=3$

12. 이차식 x^2+2x+4 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2+2x+4=0$ 의 해를 구하면

$x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$

$\therefore x^2+2x+4$

$=\left\{x-(-1+3\sqrt{i}\right\}\left\{x-(-1-\sqrt{3}i)\right\}$

$=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

13. $\sqrt{-x^2(x^2-1)^2}$ 이 실수가 되는 서로 다른 실수 x들의 총합은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2(x^2-1)^2} &= \sqrt{x^2(x^2-1)^2}i \\ &= \sqrt{x^2}\sqrt{(x^2-1)^2}i \\ &= |x|\cdot|x^2-1|i \\ &= |x|\cdot|x+1||x-1|i\end{aligned}$$

그러므로 $x=0,\ 1,\ -1$일 때 총합은 0이 된다.

14. $z=(1+i)x^2+(2-i)x-8-2i$에 대하여 $z^2<0$을 만족하는 실수 x의 값을 구하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① -4　　② -2　　③ 2　　④ 4　　⑤ 6

해설

$z=(x^2+2x-8)+(x^2-x-2)i$
$\quad=(x-2)(x+4)+(x+1)(x-2)i$
그런데, $z^2<0$에서 z는 순허수이므로
$\therefore\ x=-4$

15. 방정식 $(k^2-6)x=k(x+1)+2$의 해가 존재하지 않을 때, k의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

x에 대하여 정리하면

$(k^2-k-6)x=k+2$

$(k+2)(k-3)x=k+2$

$k=3$일 때, $0\cdot x=5$ (불능)

16. 이차방정식 $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱하면

$x^2-2(\sqrt{3}+1)x-(12+6\sqrt{3})=0$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$$x=(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+12+6\sqrt{3}}$$
$$=(\sqrt{3}+1)\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$
$$=(\sqrt{3}+1)\pm 2(\sqrt{3}+1)$$

$\therefore\ x=3\sqrt{3}+3$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

큰 근은 $3\sqrt{3}+3$

그런데 $\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7\cdots$ 이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

17. 방정식 $x^2-2|x|-3=0$의 근의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 0

해설

i) $x \geq 0$일 때
$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$
$x=-1$ 또는 $x=3$
그런데 $x \geq 0$이므로 $x=3$
ii) $x<0$일 때
$x^2+2x-3=0$, $(x-1)(x+3)=0$
$x=1$ 또는 $x=-3$
그런데 $x<0$이므로 $x=-3$
(i), (ii)에서 $x=3$ 또는 $x=-3$
따라서 근의 합은 0이다.

18. $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다. $0 \le x < 2$일 때, $4[x]x^2 - 4x - 1 = 0$의 해를 α라 하면 2α의 값은?

① $\sqrt{2}-1$ ② $\sqrt{2}+1$ ③ $\sqrt{3}+2$

④ $\sqrt{3}-1$ ⑤ $\sqrt{3}-2$

해설

(i) $0 \le x < 1$일 때, $[x]=0$이므로

$-4x-1=0$

$\therefore\ x = -\frac{1}{4}$(부적합)

(ii) $1 \le x < 2$일 때, $[x]=1$이므로

$4x^2-4x-1=0$

$\therefore\ x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

$1 \le x < 2$이므로 $x = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$

$\therefore\ 2\alpha = \sqrt{2}+1$

19. 이차방정식 $x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, m은 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2이므로
$x = 2$를 대입하면
$2^2 - 2 + m = 0 \quad \therefore m = -2$
따라서 주어진 방정식은 $x^2 - x - 2 = 0$이다.
이 방정식을 풀면
$(x - 2)(x + 1) = 0$에서 $x = 2$ 또는 $x = -1$
이므로 다른 한 근은 -1이다.

20. 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
$a=(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=b^2+3$
$-6=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b,$
$b=-3,\ a=12$
따라서 $a+b=9$

21. 다음 설명 중 틀린 것을 고르면?

① $x^2+5x+1=0$은 서로 다른 두 실근 을 가진다.

② $x^2+5=0$는 두 허근을 가진다.

③ $m=0$ 또는 4일 때, $x^2-mx+m=0$은 중근을 가진다.

④ $k \geqq 1$일 때 $x^2-2x+2-k=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다

⑤ $x^2-6x+a=0$ 은 $a=9$일 때만 중근을 가진다.

해설

① $25-4\cdot1\cdot1=21>0$

② $0^2-4\cdot1\cdot1=-4<0$

③ $(-m)^2-4\cdot1\cdot m=m(m-4)=0$

⑤ $9-1\cdot a=9-a=0,\ a=9$

$\Rightarrow$ ④ $(-1)^2-1\cdot(2-k)=k-1>0 \ \therefore\ k>1$

22. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x + y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 0$

$\therefore \ x = 2, \ y = 4$

$\therefore \ x + y = 6$

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$이 실근을 가지므로

$D/4 = 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0$

$y^2 - 8y + 16 \leq 0$

$(y - 4)^2 \leq 0, \ y = 4$

준식에 대입하면 $x = 2$

따라서 $x + y = 6$

23. x에 대한 이차방정식 $ax^2+2(a-1)x-(a+1)=0$은 어떤 근을 갖는지 판별하시오. (단, a는 실수)

① 중근

② 한 실근과 한 허근

③ 서로 다른 두 실근

④ 서로 같은 두 실근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$ax^2+2(a-1)x-(a+1)=0$

$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2+a(a+1)$

$=a^2-2a+1+a^2+a$

$=2a^2-a+1=2\left(a^2-\dfrac{1}{2}a\right)+1$

$=2\left(a^2-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{16}\right)+1-\dfrac{1}{8}$

$=2\left(a-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

24. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$

$D=(2m+a+b)^2-4(m^2+ab)=0$

$4m^2+a^2+b^2+4ma+2ab+4mb-4m^2-4ab=0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a+4b)m+(a^2-2ab+b^2)=0$

$4a+4b=0, \quad a^2-2ab+b^2=0$

$\therefore a+b=0$

25. 이차방정식 $x^2-(a+2)x+a=0$의 두 근의 차가 2일 때, 상수 a의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=a+2, \quad \alpha\beta=a$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$4=a^2+4a+4-4a$

$\therefore \; a=0$

26. 갑, 을 두 학생이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 푸는데, 갑은 이차항의 계수를 잘못 보고 풀어 두 근 $1\pm\sqrt{6}$을 얻었고, 을은 상수항을 잘못 보고 풀어 두 근 $-\frac{1}{3}$, 1을 얻었다. 이 이차방정식의 올바른 근을 구하여 더하면 얼마인가?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

먼저 갑이 푼 이차식의 형태를 알아보자.
갑이 푼 이차식을 $a'x^2+bx+c=0$라 하면
$-\frac{b}{a'}=1+\sqrt{6}+1-\sqrt{6}=2,$
$\frac{c}{a'}=(1+\sqrt{6})(1-\sqrt{6})=-5$이므로
갑이 푼 이차식은 위의 값들을 대입해 정리하면
$x^2-2x-5=0$의 실수배 형태인 것을 알 수 있다.
같은 방법으로 을이 푼 이차식을 알아보면
$-\frac{b}{a}=\frac{2}{3}, \frac{c'}{a}=-\frac{1}{3}$으로
$3x^2-2x-1=0$의 실수배임을 알 수 있다.
b값은 둘 다 잘못보고 풀지 않았는데 구한 식의 원형 2개가 b값이 일치하므로
$a=3,\ c=-5$임을 알 수 있고 b는 -2임을 알 수 있다.
따라서 원래 식에서 두 근의 합은 $\frac{2}{3}$이다.

27. 다음 x의 이차방정식의 두 실근의 절댓값이 같고, 부호가 다르게 실수 m의 값을 정하면?

$$3(x-1)(x-m)-x(7-m^2)=18-m^2$$

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 근의 절댓값이 같고 부호가 다를 조건은

$\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta<0$

준식을 x에 관해서 정리하면,

$3x^2+(m^2-3m-10)x+m^2+3m-18=0$

따라서, $\alpha+\beta=\dfrac{-(m^2-3m-10)}{3}=0,$

즉 $m^2-3m-10=0$

$(m-5)(m+2)=0 \quad \therefore\ m=5,\ -2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta=\dfrac{m^2+3m-18}{3}<0,\ m^2+3m-18<0$

$(m-3)(m+6)<0 \quad \therefore\ -6<m<3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통범위에 의해 $m=-2$

28. 이차방정식 $ax(x-1)+bx(x-1)+c(x^2+1)=0$의 두근을 α, β라 할 때, $\dfrac{c}{(\alpha-1)(\beta-1)}$의 값은?

① $\dfrac{a+b+c}{2}$ ② $a+b+c$ ③ $ab+bc+ca$

④ $\dfrac{ab+bc+ca}{2}$ ⑤ abc

해설

(Ⅰ) 주어진 식을 정리하면

$(a+b+c)x^2-(a+b)x+c=0 \quad (a+b+c \neq 0)$

$\alpha+\beta=\dfrac{a+b}{a+b+c}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a+b+c}$

(Ⅱ) (준식) $=\dfrac{c}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$

$$=\frac{c(a+b+c)}{c-(a+b)+(a+b+c)}$$

$$=\frac{c(a+b+c)}{2c}=\frac{a+b+c}{2}$$

29. 이차방정식 $f(x)=ax^2+bx+c=0$의 한 근을 $\dfrac{1}{(1+i)^2}$이라 할 때, $f(2x+3)=0$의 두 근의 합은? (단, a, b, c는 실수)

① -5 ② -3 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\frac{1}{(1+i)^2}=\frac{1}{1+2i-1}=\frac{1}{2i}=-\frac{1}{2}i$$

$f(x)=ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $-\dfrac{1}{2}i$이면

a, b, c가 실수이므로 다른 한 근은 $\dfrac{1}{2}i$

$\therefore\ f(x)=0$의 두 근의 합은 0

$f(2x+3)=0$의 두 근을 α, β라 하자.

$(2\alpha+3)+(2\beta+3)=0$

$2(\alpha+\beta)=-6$

$\therefore\ \alpha+\beta=-3$

30. 실계수의 이차방정식 $x^2+bx+c=0$이 허근 α, β를 갖고, 두 허근 사이에 $\alpha^2+2\beta=1$인 관계가 성립한다고 한다. 이 때, $b+c$의 값은?

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

계수가 실수이므로

$\alpha=p+qi$ 이면 $\beta=p-qi$ $(q\neq 0)$

$\alpha^2+2\beta=1$ 이므로

$(p+qi)^2+2(p-qi)=1$ 에서

$(p^2-q^2+2p-1)+2q(p-1)i=0$

$\therefore p^2-q^2+2p-1=0,\ 2q(p-1)=0$

$q\neq 0$이므로

$p=1,\ q^2=2$

$\therefore\ \alpha+\beta=2p=2,\quad \alpha\beta=p^2+q^2=3$

$\therefore\ x^2-2x+3=0$

$\therefore\ b=-2,\ c=3$

$\therefore\ b+c=1$