1. $x^4 - 6x^2 + 8$를 인수분해하면? (단, 유리수 범위에서 인수분해 하여라.)

① $(x^2-2)(x^2-4)$

② $(x^2-2)(x-4)(x+4)$

③ $(x^2-2)(x-2)(x+2)$

④ $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2)(x+2)$

⑤ $(x^2-\sqrt{2})(x-2)(x+2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4-6x^2+8 &= (x^2)^2-6x^2+8 \\ &= (x^2-2)(x^2-4) \\ &= (x+2)(x-2)(x^2-2) \end{aligned}$$

해설

인수정리를 이용할 수 있다.
$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$
$f(2) = 0,\ \ f(-2) = 0,$
즉, $(x-2)(x+2)$로 나누어 떨어지므로
조립제법을 써서 인수분해하면 된다.

2. 다음 중 다항식 x^4-5x^2+4를 인수분해 할 때, 나타나는 인수가 아닌 것은?

① $x-1$ ② $x-2$ ③ $x-3$ ④ $x+1$ ⑤ $x+2$

해설

$$\begin{aligned} x^4-5x^2+4 &= (x^2-1)(x^2-4) \\ &= (x+1)(x-1)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

3. $(x+1)^2+(x+1)(y+2)-6(y+2)^2$ 의 인수를 구하면?

① $x-2y+3$　② $x-2y-3$　③ $x+2y-3$

④ $x+3y-7$　⑤ $x-3y+7$

해설

$x+1=a$, $y+2=b$ 라 하면

$(x+1)^2+(x+1)(y+2)-6(y+2)^2$

$=a^2+ab-6b^2$

$=(a-2b)(a+3b)$

$=\{(x+1)-2(y+2)\}\{(x+1)+3(y+2)\}$

$=(x+1-2y-4)(x+1+3y+6)$

$=(x-2y-3)(x+3y+7)$

4. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

(좌 변) $= (x^2 + 2)^2 - x^2$

$= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$

$\therefore\ a = -1,\ b = 2$

$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$

5. $16x^4-625y^4$을 옳게 인수분해한 것은?

① $(x+5y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)$

② $(2x+y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)$

③ $(2x+5y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)$

④ $(x+5y)(x-5y)(4x^2+25y^2)$

⑤ $(2x+5y)(x-y)(4x^2+25y^2)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (4x^2)^2-(25y^2)^2\\ &= (4x^2+25y^2)(4x^2-25y^2)\\ &= (2x+5y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)\end{aligned}$$

6. $1-4x^2-y^2+4xy=(1+ax+by)(1+cx+dy)$ 일 때, $ac+bd$ 의 값을 구하면?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

(준식) $=1-(4x^2-4xy+y^2)$
$=1^2-(2x-y)^2$
$=(1+2x-y)(1-2x+y)$
$\therefore\ a=2,\ b=-1,\ c=-2,\ d=1$
$\therefore\ ac+bd=2\times(-2)+(-1)\times 1=-5$

7. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

x^2-2x-y^2+2y
$=(x^2-y^2)-2(x-y)$
$=(x+y-2)(x-y)$
$=(x+ay)(x-by+c)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-1, c=-2$
$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

8. $xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$을 인수분해하면?

① $-(x-y)(y-z)(z-x)$ ② $-(x+y)(y-z)(z-x)$

③ $-(x-y)(y+z)(z-x)$ ④ $-(x-y)(y-z)(z+x)$

⑤ $-(x-y)(y+z)(z+x)$

해설

(준 식)$= xy(x-y)+zx(z-x)+yz(y-z)$

$= yx^2-y^2x+z^2x-zx^2+yz(y-z)$

$= (y-z)x^2-(y^2-z^2)x+yz(y-z)$

$= (y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+yz(y-z)$

$= (y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$

$= (y-z)(x-y)(x-z)$

$= -(x-y)(y-z)(z-x)$

9. $x^3+x^2-8x-12$를 인수분해하면 $(x-3)\boxed{}$ 이다. 이 때, □안에 알맞은 식은?

① $(x+2)^2$　　② $(x-2)^2$　　③ $(x+1)^2$
④ $(x-3)^2$　　⑤ $(x+3)^2$

해설

조립제법을 이용한다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
3 & 1 & 1 & -8 & -12 \\
 & & 3 & 12 & 12 \\
\hline
-2 & 1 & 4 & 4 & 0 \\
 & & -2 & -4 & \\
\hline
-2 & 1 & 2 & 0 & \\
 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & &
\end{array}$$

$x^3+x^2-8x-12=(x-3)(x+2)^2$

$\therefore \boxed{}=(x+2)^2$

10. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 놓으면,
$x=-1$일 때, $-1-4-1+6=0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x)=(x+1)Q(x)$꼴
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x^2-5x+6)(x+1)$
$\therefore\ f(x)=(x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(-3)^2+(-2)^2+1^2=14$

11. 서로 다른 세 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 를 만족할 때, $x+y+z$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

$(x+y+z)=0$ 또는 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\therefore\ x+y+z=0$ 또는 $\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

그런데 $x,\ y,\ z$ 가 서로 다른 세 실수$(x\neq y\neq z)$ 이므로

$x+y+z=0$

12. 세 실수 a, b, c 사이에 $a^2-bc=b^2-ac=c^2-ab$인 관계가 성립할 때, $a^3+b^3+c^3-3abc$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 0, 2

④ 0, 1　　⑤ 0, 1, 2

해설

$a^2-bc=b^2-ac$에서 $(a^2-b^2)+(ac-bc)=0$

$\therefore\ (a+b+c)(a-b)=0\cdots$ ㉠

$b^2-ac=c^2-ab$에서 $(b^2-c^2)+(ab-ac)=0$

$\therefore\ (a+b+c)(b-c)=0\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a+b+c=0$ 또는 $a=b=c$

한편 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$이므로

ⅰ) $a+b+c=0$일 때 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

ⅱ) $a=b=c$일 때

(준식)$=3a^3-3a^3=0$

따라서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

13. a, b, c가 삼각형의 세변의 길이를 나타내고 $ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$인 관계가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=b$인 이등변 삼각형
② $a=c$인 이등변 삼각형
③ 정삼각형
④ a가 빗변인 직각 삼각형
⑤ b가 빗변인 직각 삼각형

해설

$ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$
$a^2b+ab^2-bc(b+c)-ac^2+a^2c=0$
$(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b+c)=0$
$(b+c)\left\{a^2+(b-c)a-bc\right\}$
$=(b+c)(a+b)(a-c)=0$

14. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$가 $b^3 - ac^2 + a^2b + ab^2 + a^3 - bc^2 = 0$ 인 관계를 만족할 때, 이 삼각형의 모양은?

① 정삼각형　　② 직각삼각형
③ 이등변삼각형　　④ 둔각삼각형
⑤ 직각이등변삼각형

해설

차수가 가장 낮은 c에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해 한다.

$-(a+b)c^2 + a^3 + a^2b + b^3 + ab^2 = 0$

$-(a+b)c^2 + a^2(a+b) + b^2(a+b) = 0$

$-(a+b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$

$(a+b \neq 0)$

$c^2 - a^2 - b^2 = 0$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore\ C = 90°$인 직각삼각형

15. $2012 = k$라 할 때, 2013×2011을 k로 나타내면?

① $k^2 + k$　　② $k^2 - 1$　　③ $k^2 + k + 1$
④ $k^2 - k + 1$　　⑤ $k^2 - k$

해설

$$\begin{aligned} 2013 \times 2011 &= (k+1)(k-1) \\ &= k^2 - 1 \end{aligned}$$

16. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$$\therefore \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1}=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$

$$=a+1=2000$$

17. $\dfrac{2007^3-1}{2007\times 2008+1}$ 의 값은?

① 2004 ② 2005 ③ 2006 ④ 2007 ⑤ 2008

해설

$2007=a$로 놓고

주어진 식을 a에 대한 식으로 변형하면

$$\begin{aligned}\frac{a^3-1}{a(a+1)+1} &= \frac{a^3-1}{a^2+a+1}\\ &= \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}\\ &= a-1=2007-1=2006\end{aligned}$$

18. $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=5$, $a^3+b^3+c^3=2$일 때, abc의 값은?

① $-\frac{5}{3}$ ② 0 ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 1

해설

$a^2+b^2+c^2$
$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$ 이므로
$5=1-2(ab+bc+ca)$
$\therefore\ ab+bc+ca=-2$
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 이므로
$2-3abc=1\cdot(5+2)$
$\therefore\ abc=-\frac{5}{3}$

19. 가로의 길이가 $x$cm, 세로의 길이가 y cm, 높이가 $z$cm 인 직육면체에서 $x+y+z=10,\ x^2+y^2+z^2=46$ 일 때, 이 직육면체의 겉넓이는 몇 cm^2 인가?

① $45\,\mathrm{cm}^2$　② $50\,\mathrm{cm}^2$　③ $54\,\mathrm{cm}^2$
④ $58\,\mathrm{cm}^2$　⑤ $60\,\mathrm{cm}^2$

해설

공식 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ 을 이용하여
주어진 조건을 대입하면 $xy+yz+zx=27$
겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$ 이므로 54

20. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라. (a, b, c, d는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a + b + c + d = 4$

21. $x^4+2x^2+9=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$로 인수분해될 때, $|ab-cd|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

(준식) $=(x^2+3)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

여기서 계수를 비교하면

$a=2,\ b=3,\ c=-2,\ d=3$

$\therefore |ab-cd|=|2\times3-(-2)\times3|=12$

22. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{-8}=2\sqrt{2}i$

② 3의 허수부분은 0이다.

③ $\sqrt{-2}$ 는 순허수이다.

④ $b=1$ 이면 $a+(b-1)i$ 는 실수이다.

⑤ 제곱하여 -3 이 되는 수는 $\pm\sqrt{3}i$ 이다.

해설

④ [반례] $a=i,\ b=1$ 이면 $a+(b-1)i=i$ 이므로 순허수이다.(거짓)

23. 다음 보기의 복소수 중 실수인 것의 개수는?

보기

$2i$, $1+\sqrt{-4}$, $3+4i$, 9, i^2+1

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$a+bi$ 에서 $b=0$ 인 경우, 즉 허수 부분이 0이면 실수이다.
$2i$ 의 허수 부분은 2, $1+\sqrt{-4}=1+2i$ 에서 허수 부분은 2이고,
$3+4i$ 의 허수 부분은 4이다.
9와 $i^2+1=-1+1=0$ 의 허수 부분은 0이다.
따라서 실수인 것은 9와 i^2+1 로 두 개다.

24. $i(x+2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① ±1 ② ±2 ③ ±3 ④ ±4 ⑤ ±5

해설

$i(x+2i)^2 = i(x^2+4ix-4) = x^2i-4x-4i$

$= -4x+(x^2-4)i$

실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.

$\therefore\ x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm2$

25. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 2(k-i) - k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$z = 2(k-i) - k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0 이어야 한다.

$$\begin{aligned} z &= 2(k-i) - k(1+i)^2 \\ &= 2k - 2i - 2ki \\ &= 2k - (2+2k)i \end{aligned}$$

허수 부분이 0이려면 $2 + 2k = 0$ 이어야 한다.

따라서 $k = -1$

26. 실수 k에 대하여 복소수 $z = 3(k+2i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 되도록 k의 값을 정하면?

① -2　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$z = 3(k+2i) - k(-2i)$

$\quad = 3k + (6+2k)i \Rightarrow$ 순허수

$\therefore\ 3k = 0,\ k = 0$

27. $i^2 = -1$ 이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2,\quad -\sqrt{2},\quad 2i,\quad -2i,$ $3i,\quad -3i,\quad 1-i,\quad 1+i$

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

$i^2 = -1$ 이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$ 의 꼴이 되어야 한다.
$\therefore\ 2i,\ -2i,\ 3i,\ -3i$ 4 개,
$2, -\sqrt{2}$ 는 실수이므로
$(\text{실수})^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$ 가 된다.

28. 복소수 $(1-xi)(1-i)$가 순허수가 되도록 실수 x의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

$(1-xi)(1-i)=(1-x)+(-1-x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1-x=0$,
$x=1$

29. $(3+i)(a+bi) = 1-3i$를 만족하는 실수 a, b에 대하여 $a+b$를 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(3+i)(a+bi) = 1-3i$

$(3a-b)+(a+3b)i = 1-3i$

$\therefore\ 3a-b=1,\ \ a+3b=-3$

$\Rightarrow\ \ a=0,\ \ b=-1$

$\therefore\ a+b=-1$

30. 두 복소수 $z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 에 대하여 $z_1+(2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b=8$

해설

$z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 를
$z_1+(2-4i) = z_2$ 에 대입하면
$1+(a-2)i+(2-4i) = (b-2)-ai$
$3+(a-6)i = (b-2)-ai$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$3 = b-2$, $a-6 = -a$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$b = 5,\ a = 3$
$\therefore\ a+b = 8$