

1. 두 점 A(1, 2), B(-3, 4) 를 지나는 직선에 평행하고 y 절편이 -1 인 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은 ?

① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

직선 $y = ax + b$ 는 두 점 A(1, 2), B(-3, 4) 를 지나는 직선에 평행하므로 기울기는 같다.

$$\therefore a = \frac{2-4}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

또, y 절편이 -1 이므로 $b = -1$

$$\therefore a + b = -\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{3}{2}$$

2. 세 점 A(1, 4), B (-1, 2), C (5, a)가 일직선 위에 있을 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① 2

② 8

③ 10

④ -2

⑤ -4

해설

A, B를 지나는 직선의 방정식은

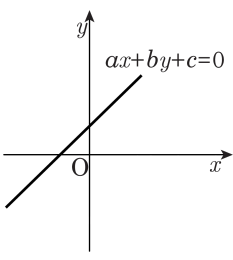
$$\text{기울기} = \frac{4-2}{1-(-1)} = 1$$

$$y = 1 \cdot (x-1) + 4 = x + 3$$

위에 C(5, a)가 존재하므로 대입하면,

$$\therefore a = 5 + 3 = 8$$

3. 직선 $ax+by+c=0$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $cx+ay+b=0$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?



- ① 제1사분면
- ② 제2사분면
- ③ 제3사분면
- ④ 제4사분면
- ⑤ 제1사분면과 제3사분면

해설

$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ 이므로
주어진 직선의 방정식은 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$
가울기 : $-\frac{a}{b} > 0 \quad \therefore \frac{a}{b} < 0$
y 절편 : $-\frac{c}{b} > 0 \quad \therefore \frac{c}{b} < 0$
두 부등식에서 $\frac{a}{c} > 0$
마찬가지로 일차함수 $cx+ay+b=0$ 은
 $y = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}$,
가울기 : $-\frac{c}{a} < 0$
y 절편 : $-\frac{b}{a} > 0$
이상에서 이 직선은 제3사분면을 지나지 않는다.

4. 점 A(-2, 1), B(4, 4) 를 이은 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점을 지나 AB 에 수직인 직선의 방정식을 l 이라고 할 때, 점 (1, 0) 에서 직선 l 에 이르는 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

선분 AB 의 내분점의 좌표

$$M\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times (-2)}{2 + 1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2 + 1}\right) = (2, 3)$$

$$\text{직선 AB 의 기울기는 } \frac{4 - 1}{4 - (-2)} = \frac{1}{2}$$

그러므로 직선 l 은 기울기가 -2 이고

(2, 3) 을 지나므로 $l : y - 3 = -2(x - 2)$

$$\therefore 2x + y - 7 = 0$$

따라서 (1, 0) 으로부터 직선 l 까지의 거리는

$$\frac{|2 \cdot 1 + 0 - 7|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

5. 두 직선 $2x + y - 4 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ 의 교점과 점 $(2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

- ① $x - y + 1 = 0$ ② $x + y + 1 = 0$ ③ $x - y - 1 = 0$
④ $x - y + 2 = 0$ ⑤ $x + y + 2 = 0$

해설

두 직선 $2x + y - 4 = 0$ 과 $x - 2y + 3 = 0$ 의
교점을 지나는 직선의 방정식은

$$2x + y - 4 + k(x - 2y + 3) = 0 \cdots \textcircled{1}$$

이때, $\textcircled{1}$ 이 점 $(2, 3)$ 을 지나므로 $3 - k = 0$

$$\therefore k = 3$$

$k = 3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면 $x - y + 1 = 0$

6. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$$x^2 - x + 1 = x + k \text{ 에서 } \frac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$$

$$\therefore k = 0$$

이때, $x = 1, y = 1$ 이므로

구하는 점은 $(1, 1)$

$$\therefore a = 1, b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

7. 세 점 A(-1, 0), B(2, -3), C(5, 3)에 대하여 등식 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax + y + b = 0$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
주어진 조건에서,
 $(x+1)^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y+3)^2$
 $= 2[(x-5)^2 + (y-3)^2]$
 $2x^2 - 2x + 2y^2 + 6y + 14$
 $= 2(x^2 - 10x + y^2 - 6y + 34)$
 $18x + 18y - 54 = 0$
 $\Rightarrow x + y - 3 = 0$
 $\therefore a + b = 1 + (-3) = -2$

8. 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 12일 때, ab 의 값은? (단, $a > 0, b > 0$)

① 3

② 4

③ 6

④ 12

⑤ 24

해설

직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ 에서 $\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1$ 이므로 x

절편은 $2a$, y 절편은 $2b$ 이다.

이 때, a, b 가 양수이므로

직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 2ab = 12$$

$$\therefore ab = 6$$

9. 직선 $x + ay + 1 = 0$ 이 직선 $2x - by + 1 = 0$ 에 수직이고, 직선 $x - (b - 3)y = 0$ 에 평행일 때, $a + 3b$ 의 값은? (단, $a > b$)

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

i) $y = -\frac{1}{a}x - \frac{1}{a}$ 이
 $y = \frac{2}{b}x + \frac{1}{b}$ 에 수직하므로,
 $\Rightarrow -\frac{1}{a} \times \frac{2}{b} = -1 \Rightarrow ab = 2 \cdots \textcircled{7}$

ii) $y = \frac{1}{b-3}x$ 에 평행하므로
 $\Rightarrow -\frac{1}{a} = \frac{1}{b-3} \Rightarrow a + b = 3$
 $\Rightarrow b = 3 - a \cdots \textcircled{8}$

$\textcircled{8}$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하여 정리하면
 $a = 2, b = 1$ ($\because a > b$)
 $\therefore a + 3b = 5$

10. 두 직선 $2x - 3y + 3 = 0$, $2x - 3y - 10 = 0$ 사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{13}}{13}$

② 1

③ $\sqrt{13}$

④ 13

⑤ $13\sqrt{13}$

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선 위의 임의의 점에서 다른 직선에 이르는 거리는 항상 일정하다.

$2x - 3y + 3 = 0$ 위의 임의의 한 점 $(0, 1)$ 에서

직선 $2x - 3y - 10 = 0$ 에 이르는 거리는

$$\frac{|-3 - 10|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

11. 원점을 지나고, 점(2, 1) 에서의 거리가 2 인 직선의 기울기 m 의 값은?

- ① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $-\frac{5}{4}$

해설

점 $P(x_1, y_1)$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

원점을 지나고, 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$mx - y = 0$$

또한, 점(2, 1) 에서 이 직선까지의 거리가 2이므로,

$$\frac{|2m - 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2, \quad |2m - 1| = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면 $4m^2 - 4m + 1 = 4m^2 + 4$,

$$-4m = 3 \quad \therefore \quad m = -\frac{3}{4}$$

12. 세 꼭지점이 $A(1, 2)$, $B(-1, 2)$, $C(-2, 0)$ 로 주어지는 삼각형 ABC 의 넓이는?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

점 $A(1, 2)$ 에서 직선 BC 에 이르는 거리를 구하여 높이로 하고, $\overline{BC}$ 의 길이를 밑변의 길이로 하여 삼각형의 넓이를 구한다. 직선 BC 의 방정식은 $2x - y + 4 = 0$ 이므로,
점 $A(1, 2)$ 에서 직선 BC 에 이르는 거리는 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.
변 BC 의 길이: $\sqrt{5}$
 $\therefore \triangle ABC = \sqrt{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{2} = 2$
 $\therefore \triangle ABC = 2$

해설

세꼭지점이 주어질 때 넓이는
 $S = \frac{1}{2}|(1 \times 2) + (-1 \times 0) + (-2 \times 2) - (-1 \times 2) + (-2 \times 2) + (1 \times 0)| = 2$

13. 점 Q가 직선 $2x + y - 4 = 0$ 위를 움직일 때, 점 A(-2, 3)과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

- ① $4x + 2y - 3 = 0$ ② $2x + 3y + 1 = 0$
③ $4x - 3y + 1 = 0$ ④ $x - 4y - 3 = 0$
⑤ $-x + y + 2 = 0$

해설

점 A(-2, 3), Q(x, y)의 중점의 좌표를

P(X, Y)라 하면,

$$P(X, Y) = P\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) \text{이므로}$$

$$X = \frac{x-2}{2}, Y = \frac{y+3}{2}$$

$$\therefore x = 2X + 2, y = 2Y - 3$$

이것을 $2x + y - 4 = 0$ 에 대입하면

$$2(2X + 2) + (2Y - 3) - 4 = 0$$

$$4X + 2Y - 3 = 0$$

$$\therefore 4x + 2y - 3 = 0$$

14. 두 직선 $mx - y + m + 1 = 0$ 과 $y = -x + 2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

- ① $\frac{1}{3} < m < 1$ ② $-\frac{1}{3} < m < 1$
 ③ $-1 < m < 2$ ④ $m < -\frac{1}{3}, m > 1$
 ⑤ $-1 < m < -\frac{1}{3}$

해설

$$mx - y + m + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow m(x+1) - (y-1) = 0 \text{ 에서}$$

이 직선은 m 의 값에 관계없이

항상 점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

다음 그림에서 $\textcircled{1}$ 이 직선 $y = -x + 2$

와

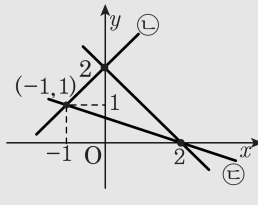
제1사분면에서 내려면 $\textcircled{1}$ 의 기울기 m

은

$$\textcircled{L} \text{의 기울기 } \frac{2-1}{0-(-1)} = 1 \text{ 보다 작고}$$

$$\textcircled{\ominus} \text{의 기울기 } \frac{0-1}{2-(-1)} = -\frac{1}{3} \text{ 보다 커야한다.}$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < m < 1$$



15. 세 직선 $2x+y+1=0$, $x-y+2=0$, $ax-y=0$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 상수 a 의 값을 구하면? (단, $a > 0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

삼각형을 만들지 못하게 하려면

$ax-y=0$ 이 나머지 두직선과 평행하거나, 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

i) $ax-y=0$ 이 다른 두 직선과 평행할 때

두 직선의 기울기가 각각 -2 , 1 이므로

$a = -2$ 또는 $1 \quad \therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$

ii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

$2x+y+1=0$ 와 $x-y+2=0$ 의 교점은 $(-1, 1)$

$ax-y=0$ 이 이 점을 지나려면

$a = -1$ (부적당)

i), ii)에서 $a = 1$

16. 세 점 A(1, 3), B(3, 1), C(5, 5) 를 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 와 직선 $kx - y + 2k - 1 = 0$ 이 만난다. 상수 k 의 최대값을 M , 최소값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

직선의 방정식 $ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0$ 은

k 의 값에 관계없이 항상 두 직선

$ax + by + c = 0$ 과 $a'x + b'y + c' = 0$

의 교점을 지난다.

그림과 같이 직선 $kx - y + 2k - 1 = 0$

즉 $y = k(x + 2) - 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, -1)$ 을 지나므로

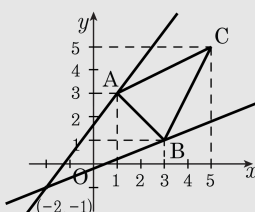
이 직선이 $\overline{AB}$ 와 만날 때, 삼각형과 만난다.

1) 점 A 를 지날 때, $3 = k(1 + 2) - 1$, $k = \frac{4}{3}$

2) 점 B 를 지날 때, $1 = k(3 + 2) - 1$, $k = \frac{2}{5}$

따라서 $\frac{2}{5} \leq k \leq \frac{4}{3}$ 일 때, 주어진 직선은 삼각형과 만난다.

$$\therefore \frac{M}{m} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{10}{3}$$



17. y 축 위의 한 점 P로부터 두 직선 $x-y+3=0$, $x-y-1=0$ 에 이르는 거리가 같을 때, 점 P의 좌표는?

① $(1, -2)$

② $(-1, 2)$

③ $(0, 2)$

④ $(0, 1)$

⑤ $(0, -2)$

해설

y 축 위의 한 점을 P $(0, y)$ 라 하면 직선

$x-y+3=0$ 과 점 P사이의 거리는

$$d_1 = \frac{|-y+3|}{\sqrt{2}}$$

직선 $x-y-1=0$

과 점 P사이의 거리는

$$d_2 = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

$d_1 = d_2$ 이므로

$$\frac{|-y+3|}{\sqrt{2}} = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$-8y = -8 \therefore y = 1$$

$$\therefore P(0, 1)$$

18. 좌표평면 위의 점 A(-1, 0) 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 B(0, 2) 에서 직선 l 에 이르는 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 직선 l 의 기울기는?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 $y = m(x + 1)$

$$\therefore mx - y + m = 0$$

점 B(0, 2) 에서

$$\text{직선 } l \text{ 까지의 거리는 } \frac{|-2 + m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4m^2 + 4m + 1 = 0$$

$$(2m + 1)^2 = 0$$

$$\therefore m = -\frac{1}{2}$$

19. 두 점 A(1,2), B(3,4)로부터 같은 거리에 있는 점 P가 나타내는 직선의 x 절편과 y 절편의 합은?

① -10 ② -4 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

P(x , y)라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$

즉, $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$$

$$y = -x + 5$$

따라서 x 절편은 5, y 절편은 5이다.

$$\therefore 5 + 5 = 10$$

20. 두 직선 $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선이 점 $(a, -1)$ 를 지날 때, a 의 값의 합은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $P(a, -1)$ 라 하면
점 P 에서 두 직선 $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 까지의 거리가
같으므로

$$d = \frac{|2a + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|a - 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

$$|2a| = |a - 3|$$

$$\therefore 2a = a - 3 \text{ 또는 } 2a = -(a - 3) \text{ 이므로}$$

$$a = -3 \text{ 또는 } a = 1$$

$$\text{따라서 } a \text{ 의 값의 합은 } -3 + 1 = -2$$