1. 두 점 A(1, 2), B(−3, 4) 를 지나는 직선에 평행하고 y 절편이 −1 인 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은 ?

① −2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

직선 $y = ax + b$ 는 두 점 A(1, 2), B(−3, 4) 를 지나는 직선에 평행하므로 기울기는 같다.

$$\therefore\ a = \frac{2-4}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

또, y 절편이 −1 이므로 $b = -1$

$$\therefore\ a + b = -\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{3}{2}$$

2. 세 점 $A(1, 4)$, $B(-1, 2)$, $C(5, a)$가 일직선 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 2　② 8　③ 10　④ -2　⑤ -4

해설

A, B를 지나는 직선의 방정식은

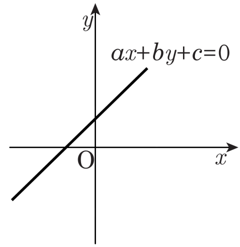
$$\text{기울기} = \frac{4-2}{1-(-1)} = 1$$

$y = 1 \cdot (x-1) + 4 = x + 3$

위에 $C(5,\ a)$가 존재하므로 대입하면,

$\therefore\ a = 5 + 3 = 8$

3. 직선 $ax+by+c=0$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $cx+ay+b=0$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?



① 제1사분면

② 제2사분면

③ 제3사분면

④ 제4사분면

⑤ 제1사분면과 제3사분면

해설

$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$ 이므로

주어진 직선의 방정식은 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

기울기 : $-\frac{a}{b} > 0 \quad \therefore\ \frac{a}{b} < 0$

y 절편 : $-\frac{c}{b} > 0 \quad \therefore\ \frac{c}{b} < 0$

두 부등식에서 $\frac{a}{c} > 0$

마찬가지로 일차함수 $cx + ay + b = 0$ 은

$y = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}$,

기울기 : $-\frac{c}{a} < 0$

y 절편 : $-\frac{b}{a} > 0$

이상에서 이 직선은 제3사분면을 지나지 않는다.

4. 점 $A(-2,1)$, $B(4,4)$ 를 이은 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 지나 AB 에 수직인 직선의 방정식을 l 이라고 할 때, 점 $(1,0)$ 에서 직선l 에 이르는 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

선분 AB 의 내분점의 좌표

$$M\left(\frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}, \frac{2\times4+1\times1}{2+1}\right) = (2,3)$$

직선 AB 의 기울기는 $\dfrac{4-1}{4-(-2)} = \dfrac{1}{2}$

그러므로 직선 l 은 기울기가 -2 이고

$(2,3)$을 지나므로 $l : y-3 = -2(x-2)$

$\therefore\ 2x+y-7=0$

따라서 $(1,0)$ 으로부터 직선 l 까지의 거리는

$$\frac{|2\cdot1+0-7|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

5. 두 직선 $2x+y-4=0$, $x-2y+3=0$의 교점과 점 $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $x-y+1=0$ ② $x+y+1=0$ ③ $x-y-1=0$

④ $x-y+2=0$ ⑤ $x+y+2=0$

해설

두 직선 $2x+y-4=0$과 $x-2y+3=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$2x+y-4+k(x-2y+3)=0 \cdots$ ㉠

이때, ㉠이 점 $(2,3)$을 지나므로 $3-k=0$

$\therefore\ k=3$

$k=3$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $x-y+1=0$

6. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$x^2 - x + 1 = x + k$ 에서 $\frac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$

$\therefore\ k = 0$

이때, $x = 1,\ y = 1$ 이므로
구하는 점은 $(1,\ 1)$

$\therefore\ a = 1,\ b = 1$

$\therefore\ a + b = 2$

7. 세 점 A$(-1,\ 0)$, B$(2,\ -3)$, C$(5,\ 3)$에 대하여 등식 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=2\overline{\mathrm{CP}}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax+y+b=0$이다. 이 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 하면
주어진 조건에서,
$(x+1)^2+y^2+(x-2)^2+(y+3)^2$
$=2\{(x-5)^2+(y-3)^2\}$
$2x^2-2x+2y^2+6y+14$
$=2(x^2-10x+y^2-6y+34)$
$18x+18y-54=0$
$\Rightarrow \quad x+y-3=0$
$\therefore\ a+b=1+(-3)=-2$

8. 직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 12 일 때, ab 의 값은? (단, $a>0,\ b>0$)

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 12 ⑤ 24

해설

직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2$ 에서 $\dfrac{x}{2a}+\dfrac{y}{2b}=1$ 이므로 x 절편은 $2a$, y 절편은 $2b$ 이다.

이 때, $a,\ b$ 가 양수이므로

직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 2a\times 2b=2ab=12$

$\therefore\ ab=6$

9. 직선 $x+ay+1=0$ 이 직선 $2x-by+1=0$ 에 수직이고, 직선 $x-(b-3)y=0$ 에 평행일 때, $a+3b$ 의 값은? (단, $a>b$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

i) $y=-\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$이

$y=\frac{2}{b}x+\frac{1}{b}$ 에 수직하므로,

$\Rightarrow -\frac{1}{a}\times\frac{2}{b}=-1 \Rightarrow ab=2\cdots$ ㉠

ii) $y=\frac{1}{b-3}x$ 에 평행하므로

$\Rightarrow -\frac{1}{a}=\frac{1}{b-3} \Rightarrow a+b=3$

$\Rightarrow b=3-a\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$a=2,\ b=1\ (\because\ a>b)$

$\therefore\ a+3b=5$

10. 두 직선 $2x-3y+3=0$, $2x-3y-10=0$사이의 거리는?

① $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$ ② 1 ③ $\sqrt{13}$

④ 13 ⑤ $13\sqrt{13}$

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선 위의 임의의 점에서
다른 직선에 이르는 거리는 항상 일정하다.
$2x-3y+3=0$ 위의 임의의 한 점 $(0,\ 1)$에서
직선 $2x-3y-10=0$에 이르는 거리는

$$\frac{|-3-10|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$$

11. 원점을 지나고, 점$(2,\ 1)$ 에서의 거리가 2 인 직선의 기울기 m 의 값은?

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $-\frac{5}{4}$

해설

점$P(x_1,\ y_1)$ 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

원점을 지나고, 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$mx-y=0$

또한, 점$(2,\ 1)$ 에서 이 직선까지의 거리가 2이므로,

$$\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2,\quad |2m-1|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $4m^2-4m+1=4m^2+4$,

$$-4m=3 \therefore \quad m=-\frac{3}{4}$$

12. 세 꼭지점이 $A(1,\ 2)$, $B(-1,\ 2)$, $C(-2,\ 0)$ 로 주어지는 삼각형 ABC 의 넓이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점 A $(1\ ,2\ )$에서 직선 BC 에 이르는 거리를 구하여 높이로 하고, $\overline{BC}$ 의 길이를 밑변의 길이로 하여 삼각형 의 넓이를 구한다. 직선 BC 의
방정식은 $2x - y + 4 = 0$ 이므로,
점 A $(1\ ,2\ )$에서 직선 BC 에 이르는 거리는
$\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.
변 BC 의 길이 : $\sqrt{5}$

$$\therefore\ \triangle ABC = \sqrt{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\therefore\ \triangle ABC = 2$$

해설

세꼭지점이 주어질 때 넓이는

$$S = \frac{1}{2}|(1 \times 2) + (-1 \times 0) + (-2 \times 2) - (-1 \times 2) + (-2 \times 2) + (1 \times 0)| = 2$$

13. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{A}(-2,3)$과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x+2y-3=0$
② $2x+3y+1=0$
③ $4x-3y+1=0$
④ $x-4y-3=0$
⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$의 중점의 좌표를 $\mathrm{P}(X,\ Y)$라 하면,

$\mathrm{P}(X,\ Y)=\mathrm{P}\left(\dfrac{x-2}{2},\ \dfrac{y+3}{2}\right)$이므로

$X=\dfrac{x-2}{2}$, $Y=\dfrac{y+3}{2}$

$\therefore\ x=2X+2$, $y=2Y-3$

이것을 $2x+y-4=0$에 대입하면

$2(2X+2)+(2Y-3)-4=0$

$4X+2Y-3=0$

$\therefore\ 4x+2y-3=0$

14. 두 직선 $mx-y+m+1=0$ 과 $y=-x+2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3}<m<1$　　② $-\frac{1}{3}<m<1$

③ $-1<m<2$　　④ $m<-\frac{1}{3},\ m>1$

⑤ $-1<m<-\frac{1}{3}$

해설

$mx-y+m+1=0 \cdots$ ㉠

$\Leftrightarrow m(x+1)-(y-1)=0$ 에서

이 직선은 m 의 값에 관계없이

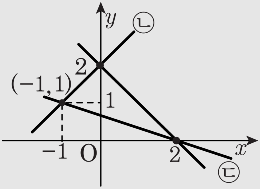
항상 점 $(-1,1)$을 지난다.

다음 그림에서 ㉠이 직선 $y=-x+2$

와

제1사분면에서 나려면 ㉠의 기울기 m

은



㉡의 기울기 $\frac{2-1}{0-(-1)}=1$ 보다 작고

㉢의 기울기 $\frac{0-1}{2-(-1)}=-\frac{1}{3}$ 보다 커야한다.

$\therefore\ -\frac{1}{3}<m<1$

15. 세 직선 $2x+y+1=0$, $x-y+2=0$, $ax-y=0$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 상수 a 의 값을 구하면? (단, $a>0$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

삼각형을 만들지 못하게 하려면
$ax-y=0$ 이 나머지 두직선과 평행하거나, 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

i) $ax-y=0$ 이 다른 두 직선과 평행할 때
두 직선의 기울기가 각각 -2, 1 이므로
$a=-2$ 또는 1 　 $\therefore\ a=1$ $(\because a>0)$

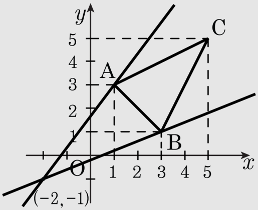
ii) 세 직선이 한 점에서 만날 때
$2x+y+1=0$ 와 $x-y+2=0$ 의 교점은 $(-1,\ 1)$
$ax-y=0$ 이 이 점을 지나려면
$a=-1$ (부적당)

i), ii) 에서 $a=1$

16. 세 점 A(1, 3), B(3, 1), C(5, 5) 를 꼭지점으로 하는 △ABC 와 직선 $kx-y+2k-1=0$ 이 만난다. 상수 k 의 최대값을 M , 최소값을 m 이라 할 때, $\dfrac{M}{m}$ 의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$　　② $\dfrac{4}{3}$　　③ 2　　④ $\dfrac{8}{3}$　　⑤ $\dfrac{10}{3}$

해설



직선의 방정식 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ 은
k 의 값에 관계없이 항상 두 직선
$ax+by+c=0$ 과 $a'x+b'y+c'=0$
의 교점을 지난다.
그림과 같이 직선 $kx-y+2k-1=0$
즉 $y=k(x+2)-1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점$(-2,\ -1)$ 을 지나므로
이 직선이 $\overline{\mathrm{AB}}$ 와 만날 때, 삼각형과 만난다.

1) 점 A 를 지날 때, $3=k(1+2)-1,\quad k=\dfrac{4}{3}$

2) 점 B 를 지날 때, $1=k(3+2)-1,\quad k=\dfrac{2}{5}$

따라서 $\dfrac{2}{5}\le k\le\dfrac{4}{3}$ 일 때, 주어진 직선은 삼각형과 만난다.

$$\therefore\ \frac{M}{m}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{5}}=\frac{10}{3}$$

17. y축 위의 한 점 P로부터 두 직선 $x-y+3=0$, $x-y-1=0$에 이르는 거리가 같을 때, 점 P의 좌표는?

① $(1, -2)$ ② $(-1, 2)$ ③ $(0, 2)$
④ $(0, 1)$ ⑤ $(0, -2)$

해설

y 축 위의 한 점을 P $(0, y)$ 라 하면 직선
$x-y+3=0$ 과 점 P 사이의 거리는

$$d_1 = \frac{|-y+3|}{\sqrt{2}}$$

직선 $x-y-1=0$
과 점 P 사이의 거리는

$$d_2 = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

$d_1 = d_2$ 이므로

$$\frac{|-y+3|}{\sqrt{2}} = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

양변을 제곱하여 정리하면
$-8y = -8 \therefore y = 1$
$\therefore P(0, 1)$

18. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 $\mathrm{B}(0,\ 2)$ 에서 직선 l 에 이르는 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 직선 l 의 기울기는?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 $y=m(x+1)$

$\therefore\ mx-y+m=0$

점 $\mathrm{B}(0,\ 2)$ 에서

직선 l 까지의 거리는 $\dfrac{|-2+m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2+4m+1=0$

$(2m+1)^2=0$

$\therefore\ m=-\dfrac{1}{2}$

19. 두 점 $A(1, 2)$, $B(3, 4)$로부터 같은 거리에 있는 점 P가 나타내는 직선의 x절편과 y절편의 합은?

① -10　② -4　③ 0　④ 5　⑤ 10

해설

$P(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$

즉, $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$이므로

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$

$y = -x + 5$

따라서 x절편은 5, y절편은 5이다.

$\therefore\ 5 + 5 = 10$

20. 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각을이등분하는 직선이 점 $(a,-1)$ 를 지날 때, a 의 값의 합은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $\mathrm{P}(a,\ -1)$ 라 하면 점 P 에서 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 까지의 거리가 같으므로

$$d=\frac{|2a+1-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a-2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$|2a|=|a-3|$

$\therefore\ 2a=a-3$ 또는 $2a=-(a-3)$ 이므로

$a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 a 의 값의 합은 $-3+1=-2$