

1. 길이가 36인 선분 AB 를 3 : 1 로 내분하는 점을 C, 선분 BC 를 4 : 1로 외분하는 점을 D 라고 할 때, 선분 AD 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

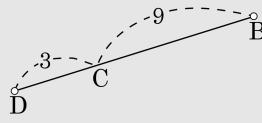
해설

$\overline{AC} : \overline{CB} = 3 : 1$ 이므로 $\overline{AC} = 27, \overline{CB} = 9$ 이다.

$\overline{BD} : \overline{DC} = 4 : 1$ 이므로 $\overline{BC} : \overline{CD} = (4 - 1) : 1 = 3 : 1$

따라서 $\overline{BC} = 9, \overline{CD} = 3$ 이다.

그러므로 $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD} = 27 - 3 = 24$ 이다.



2. 세 점 A(-3, 2), B(4, 2), C(2, 8)을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게 중심의 좌표는?

① (0, 4)

② (2, 3)

③ (2, 4)

④ (1, 3)

⑤ (1, 4)

해설

$$\left(\frac{-3+4+2}{3}, \frac{2+2+8}{3} \right) = (1, 4)$$

3. 세 점 A (1, 2), B (2, m), C ($-m$, -2)가 일직선 위에 있을 때, 상수 m 의 값은? (단, $m < 0$)

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

(직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)이므로

$$\frac{m-2}{2-1} = \frac{-2-2}{-m-1}$$

$$m-2 = \frac{4}{m+1}, \quad m^2 - m - 2 - 4 = 0$$

$$m^2 - m - 6 = 0, \quad (m+2)(m-3) = 0$$

$$\therefore m = -2 \text{ 또는 } m = 3$$

$$\therefore m = -2 \quad (\because m < 0)$$

4. 두 직선 $(a-2)x+3y-1=0$, $ax-y+3=0$ 이 평행할 때의 a 값이 $\frac{1}{n}$ 이다. n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned}\frac{a}{a'} &= \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \text{에서} \\ \frac{a-2}{a} &= \frac{3}{-1} \neq \frac{-1}{3} \quad (a \neq 0) \\ \therefore 3a &= -a+2 \\ \therefore a &= \frac{1}{2} \\ \therefore n &= 2\end{aligned}$$

5. 두 점 A(-5, -8), B(3, -2) 를 잇는 선분의 수직 이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때 $a - b$ 의 값을 구하면?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

구하는 도형 위의 한 점을 $P(x, y)$ 라 하면,
 $\overline{PA} = \overline{PB} \Rightarrow \sqrt{(x+5)^2 + (y+8)^2}$
 $= \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2}$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 + 10x + 16y + 89$
 $= x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 \Rightarrow 4x + 3y + 19 = 0$
(다른 풀이) $\overline{AB}$ 의 중점 M(-1, -5) 를 지나고
 $\overline{AB}$ 에 수직인 직선이다.
 $\therefore y + 5 = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{3} - 5$
 $\therefore y + 5 = -\frac{4}{3}x - \frac{19}{3}$
 $\therefore a - b = -\frac{4}{3} + \frac{19}{3} = \frac{15}{3} = 5$

6. 점 $(3, -3)$ 와 직선 $x - y - 4 = 0$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

$$d = \frac{|3 \times 1 + (-3) \times (-1) + (-4)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

7. 두 직선 $4x - 3y - 4 = 0$, $4x - 3y - 2 = 0$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{5}$

해설

$4x - 3y - 4 = 0$ 의 x 절편 $(1, 0)$ 에서
 $4x - 3y - 2 = 0$ 까지의 거리는

$$d = \frac{|4 - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{2}{5}$$

8. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?
- ① 6 km ② 9 km ③ 12 km
- ④ 15 km ⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A 마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X 라 하면

A(0), B(6), C(9), X(x)
A마을과 X마을 사이의 거리는
C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로
 $|x - 0| = 2|x - 9|$
곧, $|x| = 2|x - 9|$
 $\therefore 2(x - 9) = \pm x$
 $\therefore x = 6$ 또는 $x = 18$
여기서 $x = 6$ 이면 $X = B$ 가 되므로 성립하지 않는다.
따라서 $x = 18$
이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18 - 6 = 12(\text{km})$

9. 두 점 $A(a, 2b + a)$, $B(-a, a)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(-a-a)^2 + (a-(2b+a))^2} \\ &= \sqrt{4a^2 + 4b^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{5} \\ \therefore a^2 + b^2 &= 5\end{aligned}$$

10. 두 점 A(-3, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표는?

① (-3, 0)

② (1, 0)

③ (2, 0)

④ (-1, 0)

⑤ (5, 0)

해설

x 축 위의 점을 P(x , 0)라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$$

$$14x = 28$$

따라서 $x = 2$ 즉, P(2, 0)

11. 좌표평면 위의 두 점 A(3,2) , B(5,4) 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 PA + PB 의 최솟값은?

- ① 6
- ② $\sqrt{37}$
- ③ $\sqrt{38}$
- ④ $\sqrt{39}$
- ⑤ $\sqrt{40}$

해설

다음 그림과 같이 점 B(5, 4) 를 x 축에 대하여

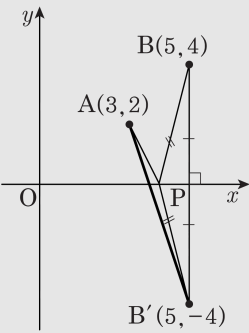
대칭이동한 점을 B'(5,-4) 라 하면

$\overline{PB} = \overline{PB'}$ 이므로

$\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PA} + \overline{PB'} \geq \overline{AB'}$

따라서 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이고

$\overline{AB'} = \sqrt{(5-3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$



12. 세 점 A $(-1, 1)$, B $(-3, -2)$, C $(2, -1)$ 에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 D의 좌표를 정하면?

㉠ $(4, 2)$

㉡ $(2, 4)$

㉢ $(3, 5)$

㉣ $(5, 3)$

㉤ $(1, -5)$

해설

D (a, b) 라 두면 평행사변형의 성질로부터
대각선 $\overline{AD}$ 의 중점과 $\overline{BC}$ 의 중점은 일치한다.

$$\therefore \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{a-3}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$$

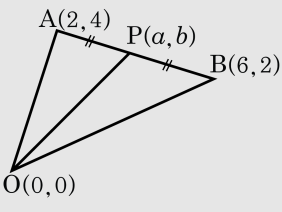
$$\therefore a = 4, b = 2$$

13. 세 점 $O(0,0)$, $A(2,4)$, $B(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의
높이가 같으므로
 $\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이려면
 P 는 선분 AB 의 중점이어야 한다.
이 때, $P\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$
즉 $P(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$
 $\therefore a+b=7$



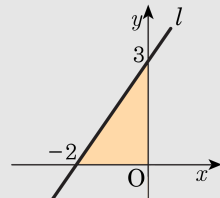
14. 직선 $3x - 2y + 6 = 0$ 이 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x - 2y + 6 = 0$ 을 그래프에 도시해보면,

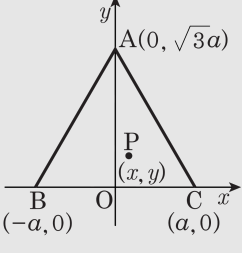


$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$

15. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?
- ① 삼각형 ② 직선 ③ 선분
④ 원 ⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $C(a,0)$ 이라고 두면, $B(-a,0)$, $A(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $P(x,y)$ 라 하면

$$2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \text{ 이므로}$$
$$2\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\}$$
$$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$$

정리하여 간단히 하면, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

∴ 직선

16. 세 점 A(-1, 0), B(2, -3), C(5, 3)에 대하여 등식 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax + y + b = 0$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
주어진 조건에서,
 $(x+1)^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y+3)^2$
 $= 2[(x-5)^2 + (y-3)^2]$
 $2x^2 - 2x + 2y^2 + 6y + 14$
 $= 2(x^2 - 10x + y^2 - 6y + 34)$
 $18x + 18y - 54 = 0$
 $\Rightarrow x + y - 3 = 0$
 $\therefore a + b = 1 + (-3) = -2$

17. 원점 O와 두 정점 A(2, 3), B(4, 0)에 대하여 $\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

② $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 29 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 29 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 29 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 + 12x + 6y + 29 = 0$

해설

P의 좌표를 P(x, y)라 하면

$\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 이므로

$$x^2 + y^2$$

$$= \{(x-2)^2 + (y-3)^2\} + \{(x-4)^2 + y^2\}$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$$

18. 두 점 A(1, 5), B(5, 3)에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는?
- ① (4, 5)

② (3, 4)

③ (2, 3)

④ (1, 2)

⑤ (0, 1)

해설

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 되기 위한 점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 P(3, 4)

해설

P(x, y)로 놓으면
$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= \{(x-1)^2 + (y-5)^2\} \\ &\quad + \{(x-5)^2 + (y-3)^2\} \\ &= 2x^2 - 12x + 2y^2 - 16y + 60 \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 2(y^2 - 8y + 16) + 10 \\ &= 2(x-3)^2 + 2(y-4)^2 + 10\end{aligned}$$
따라서 x = 3, y = 4일 때 최솟값을 갖는다.

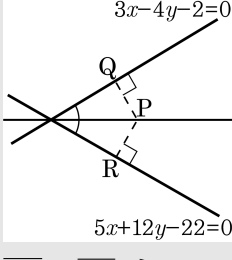
19. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q,R이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$$13(3X-4Y-2) = \pm 5(5X+12Y-22)$$

$$\text{즉, } 13(3X-4Y-2) = 5(5X+12Y-22) \text{ 또는}$$

$$13(3X-4Y-2) = -5(5X+12Y-22) \text{ 정리하면}$$

$$x-8y+6=0 \text{ 또는 } 8x+y-17=0 \text{ 에서}$$

기울기가 양이므로

$$\therefore x-8y+6=0$$

$$\therefore a+b+c=-1$$

20. 점 Q가 직선 $2x + y - 4 = 0$ 위를 움직일 때, 점 A(-2, 3)과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

- ① $4x + 2y - 3 = 0$
- ② $2x + 3y + 1 = 0$
- ③ $4x - 3y + 1 = 0$
- ④ $x - 4y - 3 = 0$
- ⑤ $-x + y + 2 = 0$

해설

점 A(-2, 3), Q(x, y)의 중점의 좌표를 P(X, Y)라 하면,
 $P(X, Y) = P\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}\right)$ 이므로
 $X = \frac{x-2}{2}, Y = \frac{y+3}{2}$
 $\therefore x = 2X + 2, y = 2Y - 3$
이것을 $2x + y - 4 = 0$ 에 대입하면
 $2(2X + 2) + (2Y - 3) - 4 = 0$
 $4X + 2Y - 3 = 0$
 $\therefore 4x + 2y - 3 = 0$

21. 직선 $y = x + 2$ 위의 점 P는 두 점 A(-2, 0), B(4, -2)로부터 같은 거리에 있다고 할 때, 점 P의 좌표는?

① (-1, 1)

② (0, 2)

③ (1, 3)

④ (2, 4)

⑤ (3, 5)

해설

P가 $y = x + 2$ 위에 있으므로 P(a , $a + 2$)라고 놓을 수 있다.

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로

$$\sqrt{(a+2)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (a+4)^2}$$

$$2(a+2)^2 = (a-4)^2 + (a+4)^2$$

$$8a = 24$$

$$\therefore a = 3$$

$$\therefore P(3, 5)$$

22. 세 점 A(6, 2) B(0, -6), C(7, -5)를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① -24 ② -18 ③ -12 ④ 9 ⑤ 21

해설

$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$\therefore$ 빗변 $\overline{AB}$ 의 중점이 외심이다.

$$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{2+(-6)}{2} \right) = (3, -2)$$

$$\therefore 3ab = -18$$

23. $\triangle ABC$ 의 무게중심이 $G(1, 4)$ 이고, 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점이 각각 $(-1, 6)$, (a, b) , $(3, 4)$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\triangle ABC$ 의 무게중심 G 는

세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치한다.

따라서 $\frac{-1+a+3}{3} = 1$, $\frac{6+b+4}{3} = 4$ 이므로

$a = 1$, $b = 2$ 이고, $\therefore a + b = 3$

24. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의조건은?

$3x + y + 2 = 0, \ x + 3y + k = 0, \ 2x - y + 3 = 0$

- ① $k \neq -2$

② $k \neq -3$

③ $k \neq -4$
- ④ $k \neq -7$

⑤ $k \neq -11$

해설

$3x + y + 2 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$

$x + 3y + k = 0 \cdots \textcircled{㉡}$ 일 때,

$2x - y + 3 = 0 \cdots \textcircled{㉢}$

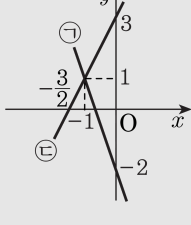
다음 그림과 같이

세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.

㉠, ㉡, ㉢ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.

㉠과 ㉢을 연립하여 교점의 좌표를 구하면 $(-1, 1)$ 이다.

이 점을 ㉡에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1 + 3 + k \neq 0, \therefore k \neq -2$



25. 두 직선 $y = -x + 3$, $y = mx + m + 2$ 이 제 1사분면에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위가 $\alpha < m < \beta$ 일 때, $2\alpha + \beta$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

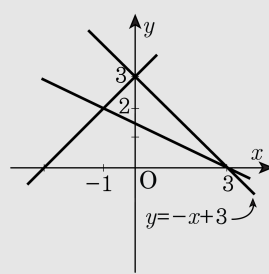
$m(x+1) - (y-2) = 0$ 에서 $y = mx + m + 2$ 는 m 의 값에 관계없이 $(-1, 2)$ 를 지난다.

$(3, 0)$ 을 지날때 $m = -\frac{1}{2}$

$(0, 3)$ 을 지날때 $m = 1$

$\therefore -\frac{1}{2} < m < 1$

따라서 $2\alpha + \beta = 0$



26. 원점 $O(0, 0)$ 에서 직선 $(k+1)x + (k+2)y + 3 = 0$ 에 내린 수선의 길이가 최대일 때, 그 길이는? (단, k 는 상수)

① 2

② 3

③ $2\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{3}$

⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원점과 직선 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{(k+1)^2 + (k+2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2k^2 + 6k + 5}}$$

$$\leq \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3\sqrt{2}$$

$$(\because \sqrt{2k^2 + 6k + 5})$$

$$= \sqrt{2\left(k + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$$

27. 원점 O 와 점 $A(10, 0)$ 으로부터 직선 $3x + 4y + 30 = 0$ 에 내린 수선을 각각 $\overline{OP}$, $\overline{AQ}$ 라 할 때, 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이는?

- ① 64
- ② 72
- ③ 80
- ④ 81
- ⑤ 90

해설

$$\overline{OP} = \frac{|30|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6$$

$$\overline{AQ} = \frac{|30 + 30|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 12$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

따라서 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이를 S 라 하면,

$$S = \frac{1}{2} \cdot (\overline{OP} + \overline{AQ}) \cdot \overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot (6 + 12) \cdot 8 = 72$$