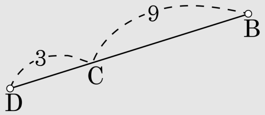
1. 길이가 36 인 선분 AB 를 3 : 1 로 내분하는 점을 C, 선분 BC 를 4 : 1 로 외분하는 점을 D 라고 할 때, 선분 AD 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$\overline{AC} : \overline{CB} = 3 : 1$ 이므로 $\overline{AC} = 27, \overline{CB} = 9$ 이다.



$\overline{BD} : \overline{DC} = 4 : 1$ 이므로 $\overline{BC} : \overline{CD} = (4-1) : 1 = 3 : 1$

따라서 $\overline{BC} = 9, \overline{CD} = 3$ 이다.

그러므로 $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD} = 27 - 3 = 24$ 이다.

2. 세 점 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ 2)$, $\mathrm{C}(2,\ 8)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는?

① $(0,\ 4)$ ② $(2,\ 3)$ ③ $(2,\ 4)$

④ $(1,\ 3)$ ⑤ $(1,\ 4)$

해설

$$\left(\frac{-3+4+2}{3},\ \frac{2+2+8}{3}\right)=(1,\ 4)$$

3. 세 점 $A(1,\ 2)$, $B(2,\ m)$, $C(-m,\ -2)$가 일직선 위에 있을 때, 상수 m의 값은? (단, $m<0$)

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

(직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)이므로

$$\frac{m-2}{2-1}=\frac{-2-2}{-m-1}$$

$$m-2=\frac{4}{m+1},\quad m^2-m-2-4=0$$

$$m^2-m-6=0,\quad (m+2)(m-3)=0$$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=3$

$\therefore m=-2$ $(\because m<0)$

4. 두 직선 $(a-2)x+3y-1=0$, $ax-y+3=0$이 평행할 때의 a값이 $\frac{1}{n}$이다. n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ 에서

$\frac{a-2}{a}=\frac{3}{-1}\neq\frac{-1}{3}$ $(a\neq 0\ )$

$\therefore\ 3a=-a+2$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ n=2$

5. 두 점 $A(-5,\ -8)$, $B(3,\ -2)$ 를 잇는 선분의 수직 이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때 $a - b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

구하는 도형 위의 한 점을 $P(x,\ y)$ 라 하면,

$\overline{PA} = \overline{PB} \Rightarrow \sqrt{(x+5)^2 + (y+8)^2}$

$= \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 10x + 16y + 89$

$= x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 \Rightarrow 4x + 3y + 19 = 0$

(다른 풀이) $\overline{AB}$ 의 중점 $M(-1,\ -5)$ 를 지나고 $\overline{AB}$ 에 수직인 직선이다.

$\therefore y + 5 = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{3} - 5$

$\therefore y + 5 = -\frac{4}{3}x - \frac{19}{3}$

$\therefore a - b = -\frac{4}{3} + \frac{19}{3} = \frac{15}{3} = 5$

6. 점 $(3, -3)$와 직선 $x - y - 4 = 0$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $\sqrt{2}$

해설

$$d = \frac{|3 \times 1 + (-3) \times (-1) + (-4)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

7. 두 직선 $4x-3y-4=0$, $4x-3y-2=0$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{5}$

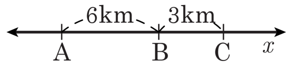
해설

$4x-3y-4=0$ 의 x 절편 $(1,0)$ 에서

$4x-3y-2=0$ 까지의 거리는

$$d=\frac{|4-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{2}{5}$$

8. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6 km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3 km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?

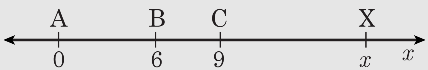


① 6 km ② 9 km ③ 12 km

④ 15 km ⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X라 하면



A(0), B(6), C(9), X(x)

A마을과 X마을 사이의 거리는

C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로

$|x-0| = 2|x-9|$

곧, $|x| = 2|x-9|$

$\therefore\ 2(x-9) = \pm x$

$\therefore\ x = 6$ 또는 $x = 18$

여기서 $x = 6$이면 X $=$ B가 되므로 성립하지 않는다.

따라서 $x = 18$

이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18-6 = 12$(km)

9. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 2b+a)$, $\mathrm{B}(-a,\ a)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, a^2+b^2의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} &= \sqrt{(-a-a)^2+\{a-(2b+a)\}^2} \\ &= \sqrt{4a^2+4b^2} = 2\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$\therefore\ a^2+b^2=5$

10. 두 점 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ 0)$ ② $(1,\ 0)$ ③ $(2,\ 0)$

④ $(-1,\ 0)$ ⑤ $(5,\ 0)$

해설

x축 위의 점을 $P(x, 0)$라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$이므로

$(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$

$14x = 28$

따라서 $x = 2$ 즉, $P(2,\ 0)$

11. 좌표평면 위의 두 점 $A(3, 2)$, $B(5, 4)$ 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은?

① 6　② $\sqrt{37}$　③ $\sqrt{38}$　④ $\sqrt{39}$　⑤ $\sqrt{40}$

해설

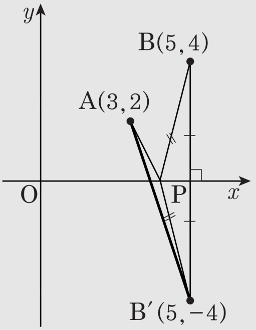
다음 그림과 같이 점 $B(5,\ 4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 $B'(5, -4)$ 라 하면

$\overline{PB}=\overline{PB'}$ 이므로

$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB'}\geq\overline{AB'}$

따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이고

$\overline{AB'}=\sqrt{(5-3)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$



12. 세 점 A $(-1,1)$, B $(-3,-2)$, C $(2,-1)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 D의 좌표를 정하면?

① $(4,2)$ ② $(2,4)$ ③ $(3,5)$

④ $(5,3)$ ⑤ $(1,-5)$

해설

D (a,b)라 두면 평행사변형의 성질로부터
대각선 $\overline{AD}$의 중점과 $\overline{BC}$의 중점은 일치한다.

$$\therefore \left(\frac{1}{2},0\right)=\left(\frac{a-3}{2},\frac{b-2}{2}\right)$$

$$\therefore a=4,\ b=2$$

13. 세 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(2,4), \mathrm{B}(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $\mathrm{P}(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle\mathrm{OAB}$ 와 $\triangle\mathrm{OAP}$ 의 높이가 같으므로

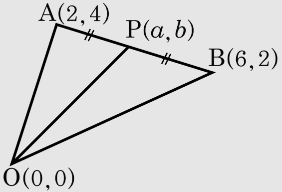
$\triangle\mathrm{OAB} = 2\triangle\mathrm{OAP}$ 이려면

P는 선분 AB 의 중점이어야 한다.

이 때, $\mathrm{P}\left(\dfrac{2+6}{2}, \dfrac{4+2}{2}\right)$

즉 $\mathrm{P}(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$

$\therefore a+b=7$



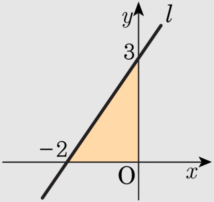
14. 직선 $3x-2y+6=0$이 x 축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x-2y+6=0$을 그래프에 도시해보면,



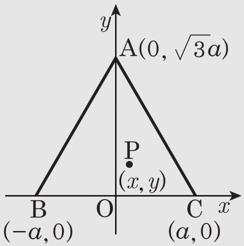
∴ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$

15. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?

① 삼각형 ② 직선 ③ 선분
④ 원 ⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $C(a, 0)$이라고 두면, $B(-a, 0)$, $A(0, \sqrt{3}a)$이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 이므로

$$2\left\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\right\}$$

$$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$$

정리하여 간단히 하면, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore$ 직선

16. 세 점 A$(-1,\ 0)$, B$(2,\ -3)$, C$(5,\ 3)$에 대하여 등식 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=2\overline{\mathrm{CP}}^2$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax+y+b=0$이다. 이 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 하면

주어진 조건에서,

$(x+1)^2+y^2+(x-2)^2+(y+3)^2$

$=2\{(x-5)^2+(y-3)^2\}$

$2x^2-2x+2y^2+6y+14$

$=2(x^2-10x+y^2-6y+34)$

$18x+18y-54=0$

$\Rightarrow\quad x+y-3=0$

$\therefore\ a+b=1+(-3)=-2$

17. 원점 O와 두 정점 A(2, 3), B(4, 0)에 대하여 $\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

② $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 29 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 29 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 29 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 + 12x + 6y + 29 = 0$

해설

P의 좌표를 P(x, y)라 하면

$\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$이므로

$x^2 + y^2$

$= \{(x-2)^2 + (y-3)^2\} + \{(x-4)^2 + y^2\}$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

18. 두 점 A(1, 5), B(5, 3)에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는?

① (4, 5) ② (3, 4) ③ (2, 3)

④ (1, 2) ⑤ (0, 1)

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 되기 위한
점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 P(3, 4)

해설

$\mathrm{P}(x,\ y)$로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2 &= \{(x-1)^2+(y-5)^2\} \\ &\quad +\{(x-5)^2+(y-3)^2\} \\ &= 2x^2-12x+2y^2-16y+60 \\ &= 2(x^2-6x+9)+2(y^2-8y+16)+10 \\ &= 2(x-3)^2+2(y-4)^2+10\end{aligned}$$

따라서 $x=3,\ y=4$일 때 최솟값을 갖는다.

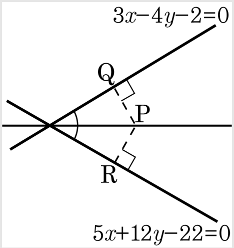
19. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

20. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{A}(-2,3)$과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x+2y-3=0$　② $2x+3y+1=0$

③ $4x-3y+1=0$　④ $x-4y-3=0$

⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$의 중점의 좌표를
$\mathrm{P}(X,\ Y)$ 라 하면,

$\mathrm{P}(X,\ Y)=\mathrm{P}\left(\dfrac{x-2}{2},\ \dfrac{y+3}{2}\right)$ 이므로

$X=\dfrac{x-2}{2}$, $Y=\dfrac{y+3}{2}$

$\therefore\ x=2X+2$, $y=2Y-3$

이것을 $2x+y-4=0$ 에 대입하면

$2(2X+2)+(2Y-3)-4=0$

$4X+2Y-3=0$

$\therefore\ 4x+2y-3=0$

21. 직선 $y = x + 2$ 위의 점 P는 두 점 $A(-2, 0)$, $B(4, -2)$로부터 같은 거리에 있다고 할 때, 점 P의 좌표는?

① $(-1, 1)$ ② $(0, 2)$ ③ $(1, 3)$

④ $(2, 4)$ ⑤ $(3, 5)$

해설

P가 $y = x + 2$ 위에 있으므로 $P(a,\ a + 2)$라고 놓을 수 있다.

$\overline{PA} = \overline{PB}$이므로

$\sqrt{(a+2)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (a+4)^2}$

$2(a+2)^2 = (a-4)^2 + (a+4)^2$

$8a = 24$

$\therefore\ a = 3$

$\therefore\ P(3,\ 5)$

22. 세 점 $A(6,2)$ $B(0,-6)$, $C(7,-5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 (a,b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① -24 ② -18 ③ -12 ④ 9 ⑤ 21

해설

$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$ 이므로 $\angle C=90°$ 인 직각삼각형이다.

$\therefore$ 빗변 $\overline{AB}$ 의 중점이 외심이다.

$$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{2+(-6)}{2}\right)=(3,-2)$$

$\therefore\ 3ab=-18$

23. $\triangle ABC$ 의 무게중심이 $G(1,\ 4)$ 이고, 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점이 각각 $(-1\ ,6\ )$, $(a\ ,b\ )$,$(3\ ,4\ )$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\triangle ABC$ 의 무게중심 G 는
세변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치한다.

따라서 $\dfrac{-1+a+3}{3}=1$, $\dfrac{6+b+4}{3}=4$ 이므로

$a=1$, $b=2$ 이고, $\therefore\ a+b=3$

24. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의조건은?

$$3x+y+2=0,\ \ x+3y+k=0,\ \ 2x-y+3=0$$

① $k \neq -2$　　② $k \neq -3$　　③ $k \neq -4$

④ $k \neq -7$　　⑤ $k \neq -11$

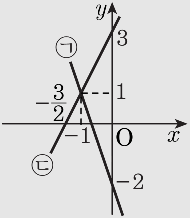
해설

$3x+y+2=0 \cdots$ ㉠

$x+3y+k=0 \cdots$ ㉡ 일 때,

$2x-y+3=0 \cdots$ ㉢

다음 그림과 같이
세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.

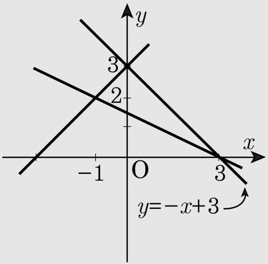


㉠, ㉡, ㉢ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.
㉠과 ㉢을 연립하여 교점의 좌표를 구하면$(-1,\ 1)$ 이다.
이 점을 ㉡에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1+3+k \neq 0$,　$\therefore\ k \neq -2$

25. 두 직선 $y=-x+3, y=mx+m+2$이 제 1사분면에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위가 $\alpha < m < \beta$ 일 때, $2\alpha+\beta$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설



$m(x+1)-(y-2)=0$ 에서 $y=mx+m+2$ 는
m 의 값에 관계없이 $(-1,\ 2)$ 를 지난다.

$(3,\ 0)$ 을 지날때 $m=-\dfrac{1}{2}$

$(0,\ 3)$ 을 지날때 $m=1$

$\therefore\ -\dfrac{1}{2}<m<1$

따라서 $2\alpha+\beta=\ 0$

26. 원점 $O(0,\ 0)$ 에서 직선 $(k+1)x+(k+2)y+3=0$ 에 내린 수선의 길이가 최대일 때, 그 길이는? (단, k 는 상수)

① 2 ② 3 ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원점과 직선 사이의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k+2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2k^2+6k+5}}$$

$$\le\frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\sqrt{2}$$

$(\because\ \sqrt{2k^2+6k+5}$

$$=\sqrt{2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\ge\sqrt{\frac{1}{2}})$$

27. 원점 O 와 점 $A(10,0)$ 으로부터 직선$3x+4y+30=0$ 에 내린 수선을 각각 $\overline{OP}$, $\overline{AQ}$ 라 할 때, 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이는?

① 64 ② 72 ③ 80 ④ 81 ⑤ 90

해설

$$\overline{OP} = \frac{|\,30\,|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 6$$

$$\overline{AQ} = \frac{|\,30+30\,|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 12$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{10^2-6^2} = 8$$

따라서 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이를 S 라 하면,

$$S = \frac{1}{2}\cdot(\overline{OP}+\overline{AQ})\cdot\overline{PQ} = \frac{1}{2}\cdot(6+12)\cdot 8 = 72$$