1. 임의의 복소수 a, b 에 대하여 연산 $\square$를 $a \square b = (a+b) - ab$ 로 정의할 때, $z \square i = 3 + 2i$ 를 만족하는 복소수 z 는?

① $-1 + 2i$　② $1 + 2i$　③ $3 + 2i$
④ $5 + 2i$　⑤ $7 + 2i$

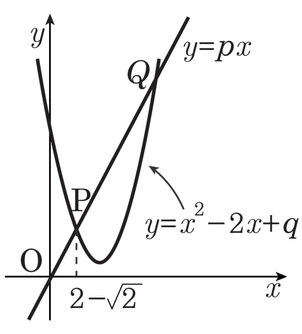
해설

$z \square i = z + i - zi = (1-i)z + i$ 에서
$(1-i)z + i = 3 + 2i$
$(1-i)z = 3 + i$

$$\therefore\ z = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$$

2. 다음 그림과 같이 직선 $y = px$ 와 이차함수$y = x^2 - 2x + q$ 의 그래프가 두 점 P, Q 에서 만나고 점 P 의 x 좌표가 $2 - \sqrt{2}$ 이다. 이때, 유리수 p, q 의 곱 pq 의 값은?



① 1 ② 4 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

해설

두 점 P, Q 의 x 좌표는
이차방정식 $x^2 - 2x + q = px$ 의 두 실근이다.
$x^2 - (p+2)x + q = 0$ 에서 p, q 는 유리수이므로
한 근이 $2 - \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $2 + \sqrt{2}$ 이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$(2 - \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) = p + 2$
$\therefore\ p = 2$
$(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = q$
$\therefore\ q = 2$
$\therefore\ pq = 4$

3. x, y 가 실수일 때, 복소수 $z = x + yi$ 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 하면 $z\bar{z} = 3$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{3}{z}\right)$ 의 값은 ?

① x　　② y　　③ $x + y$

④ $x - y$　　⑤ $2x + y$

해설

$z = x + yi$, $\bar{z} = x - yi$ 이므로

$z \cdot \bar{z} = 3$ 이면 $\bar{z} = \frac{3}{z}$ 을 대입

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(z + \frac{3}{z}\right) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ &= \frac{1}{2}(x + yi + x - yi) \\ &= x \end{aligned}$$

4. $x,\ y$ 에 대한 이차식 $f(x,\ y)=x^2+2(y-1)x+y^2+ky-3$ 이 $x,\ y$ 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

① -3　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2+2(y-1)x+y^2+ky-3=0$ 의 두 근을 구하면
근의 공식에 의하여
$x=-(y-1)\pm\sqrt{(y-1)^2-(y^2+ky-3)}$
$\quad=-(y-1)\pm\sqrt{-(2+k)y+4}$ $\cdots\cdots$ ㉠
한편, $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이면
$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$ 이고
준식이 $x,\ y$ 의 일차식으로 인수분해되므로
x 의 두 근 ㉠에서 $-(2+k)y+4$가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.
따라서 근호 안의 판별식 D 는 0 이어야 한다.
$\therefore\ D=(2+k)^2-4\cdot 0\cdot 4=0$
$2+k=0$
$\therefore\ k=-2$

5. 자연수 n에 대하여 이차방정식 $n(n+1)x^2-x+2006=0$의 두 근을 $\alpha_n,\ \beta_n$이라할 때, $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{2006})+(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{2006})$의 값은?

① $\frac{2004}{2006}$　② $\frac{2005}{2006}$　③ $\frac{2006}{2007}$　④ $\frac{2007}{2008}$　⑤ $\frac{2007}{2009}$

해설

$n(n+1)x^2-x+2006=0$의 두 근이 $\alpha_n,\ \beta_n$이므로

$\alpha_n+\beta_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

준식$=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+(\alpha_{2006}+\beta_{2006})$

$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{2006}-\frac{1}{2007})$

$=1-\frac{1}{2007}=\frac{2006}{2007}$

6. 둘레의 길이가 48cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되도록 하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 순서대로 써라.

▶ 답: ______ cm

▶ 답: ______ cm

▷ 정답: 12 cm

▷ 정답: 12 cm

해설

가로, 세로의 길이를 각각 x cm, $(24-x)$ cm 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(24-x) \\ &= -x^2+24x \\ &= -(x-12)^2+144 \end{aligned}$$

$x=12$ 일 때, 최댓값 144를 갖는다.

$\therefore x=12,\ 24-x=12$

따라서 가로의 길이는 12 cm, 세로의 길이도 12 cm

7. 이차함수 $y = x^2 - 2px + 2p^2 - 4p + 2$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x^2 - 2px + 2p^2 - 4p + 2$
$= (x-p)^2 + p^2 - 4p + 2$ 이므로
$m = p^2 - 4p + 2 = (p-2)^2 - 2$
따라서 $p = 2$ 일 때, 최솟값 -2 를 갖는다.

8. $x,\ y$ 가 실수일 때, $f(x,\ y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -5

해설

$$\begin{aligned} f(x,\ y) &= x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y \\ &= x^2 - 2(y-1)x + 2y^2 + 2y \\ &= \{x - (y-1)\}^2 + (y+2)^2 - 5 \end{aligned}$$

따라서 $x = -3,\ y = -2$ 일 때, 최솟값 -5

9. 한 근이 $1+\sqrt{3}i$ 인 방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 과 방정식 $x^2+ax+2=0$ 이 오직 한 개의 공통 실근을 가질 때, $a-b+c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 실수)

① -14　② -13　③ -12　④ -11　⑤ -9

해설

$1+\sqrt{3}i$가 근이므로 $1-\sqrt{3}i$ 도 근이다. 이때, 또 한 근을 α 라 하면 근과 계수 관계에서

$(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)+\alpha=-a \cdots\cdots$ ㉠

$(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)\alpha+(1-\sqrt{3}i)\alpha=b \cdots\cdots$ ㉡

$(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)\alpha=-c \cdots\cdots$ ㉢

또, 방정식 $x^2+ax+2=0$ 과의 공통근이 α 이므로

$\alpha^2+a\alpha+2=0 \cdots\cdots$ ㉣

㉠에서 $\alpha=-a-2$ 를 ㉣에 대입하면

$(-a-2)^2+a(-a-2)+2=0$

$\therefore a=-3,\ \alpha=1$

㉡에서 $b=2\alpha+4=6$

㉢에서 $c=-4\alpha=-4$

$\therefore\ a-b+c=-3-6-4=-13$

10. x 에 대한 이차방정식 $x^2-(2a-1)x+a+1=0$ 의 두 근 α,β가 모두 정수일 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ 의 값을 구하면? (단, a는 자연수)

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

근이 정수이려면 판별식 $D=(2a-1)^2-4(a+1)=k^2$ (k 는 정수) 이어야 한다. 이 식을 정리하면 $4a^2-8a-3=k^2$, $(2a-2)^2-7=k^2$, $(2a-2)^2-k^2=7$, $(2a-2+k)(2a-2-k)=7$ a, k는 정수이므로

(i) $2a-2+k=1,\ 2a-2-k=7$ 에서
$a=3,\ k=-3$

(ii) $2a-2+k=7,\ 2a-2-k=1$ 에서
$a=3,\ k=3$

(iii) $2a-2+k=-1,\ 2a-2-k=-7$ 에서 $a=-1,\ k=3$

(iv) $2a-2+k=-7,\ 2a-2-k=-1$ 에서 $a=-1,\ k=-3$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$

$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2a-1}{a+1}=\frac{5}{4}$