1. 세 다항식 $A = x^2 + 3x - 2,\ B = 3x^2 - 2x + 1,\ C = 4x^2 + 2x - 3$ 에 대하여
$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$를 간단히 하면?

① $3x^2 + 12x - 13$
② $-3x^2 + 24x + 21$
③ $3x^2 - 12x + 21$
④ $-3x^2 - 24x + 21$
⑤ $x^2 + 12x + 11$

해설

$$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$$
$$= -2A + 5B - 4C$$
$$= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3)$$
$$= -3x^2 - 24x + 21$$

2. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$
\begin{aligned}
2A + B &= 2(a+2b) + (2a+3b) \\
&= (2a+4b) + (2a+3b) & \text{㉠ 분배법칙} \\
&= 2a + (4b+2a) + 3b & \text{㉡ 결합법칙} \\
&= 2a + (2a+4b) + 3b & \text{㉢ 교환법칙} \\
&= (2a+2a) + (4b+3b) & \text{㉣ 교환법칙} \\
&= (2+2)a + (4+3)b & \text{㉤ 분배법칙} \\
&= 4a + 7b
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a+4b) + 3b = (2a+2a) + (4b+3b)$: 결합법칙

3. $(6x^3 - x^2 - 5x + 5) \div (2x - 1)$ 의 몫을 a, 나머지를 b라 할 때, $a + b$를 구하면?

① $3x^2 + x + 1$ ② $x^2 + x + 1$ ③ $3x^2 + 1$

④ $x^2 + x - 1$ ⑤ $3x^2 + x$

해설

나눗셈을 이용하면 $a = 3x^2 + x - 2,\ b = 3$

$\therefore\ a + b = 3x^2 + x + 1$

해설

조립제법을 이용할 수 있다.

이 때, $2x - 1$ 로 나눈 몫은 $x - \frac{1}{2}$ 로 나눈 몫의 $\frac{1}{2}$ 이고 나머지는 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right) Q(x) + R \\ &= (2x - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot Q(x) + R \end{aligned}$$

4. 다항식 $f(x)$를 $2x^2+3x+2$로 나누었더니 몫이 $3x-4$이고, 나머지가 $2x+5$이었다. 이 때, $f(1)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$$
$$=6x^3+9x^2+6x-8x^2-12x-8+2x+5$$
$$=6x^3+x^2-4x-3$$
$$\therefore\ f(1)=6+1-4-3=0$$

해설

$$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$$
$$f(1)=(2+3+2)(3-4)+(2+5)=-7+7=0$$

5. 다음 중 다항식의 사칙연산이 잘못된 것은?

① $(4x-2)+(7-2x)=2x-5$

② $(x^2+2y^2)-2(y^2-3x^2)=7x^2$

③ $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

④ $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

⑤ $(x^3+1)\div(x+1)=x^2-x+1$

해설

① $(4x-2)+(7-2x)=2x+5$

6. 다항식 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 을 전개하면?

① a^2-b^2
② a^3-b^3
③ a^3+b^3
④ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
⑤ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

해설

공식 : $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

7. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$ 일 때, $(x+y)(y+z)(z+x)$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x+y+z=1$에서

$x+y=1-z$

$y+z=1-x$

$z+x=1-y$

$(x+y)(y+z)(z+x)=(1-z)(1-x)(1-y)$

$=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz$

$=1-1+2-3=-1$

8. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a, 상수항을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 8 ② 15 ③ 24 ④ 36 ⑤ 47

해설

$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$
$= (x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x = X(\text{치환}))$
$= (X-2)(X-12)$
$= X^2 - 14X + 24$
$= (x^2+x)^2 - 14(x^2+x) + 24$
$= x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$
$\therefore\ a = 1+2-13-14+24 = 0,\ b = 24$
$\therefore\ a+b = 0+24 = 24$

해설

㉠ 각 항 계수의 총합 구하기
$x=1$ 대입, $a=0$
㉡ 상수항 구하기
$x=0$ 대입, $b=24$

9. $(x^3-3x^2+3x+4)(x^2+2x-5)$를 전개한 식에서 x^2의 계수를 구하면?

① 10　　② 15　　③ 19　　④ 21　　⑤ 25

해설

전개식에서 x^2 항은

ⅰ) (이차항)×(삼차항)에서 $15x^2+4x^2=19x^2$

ⅱ) (일차항)×(일차항)에서 $6x^2$

$\therefore$ x^2의 계수는 $19+6=25$

10. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x)+(1+x+x^2+x^3)^3$$

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

i) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수

: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,

계수$=2$

: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x를 곱할 때,

계수$=1$

ii) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수

$x+x^2+x^3=Y$라 하면,

$(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$

$3Y=3x+3x^2+3x^3$

일차항의 계수$=3$, 다른 항에는 일차항이 없다.

i), ii) 에서 $2+1+3=6$

11. $x+y+z=3,\ xy+yz+zx=-1$ 일 때 $x^2+y^2+z^2$ 의 값을 구하면?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (x+y+z)^2-2(xy+yz+xz) \\ &= 9+2=11 \end{aligned}$$

12. 다음 중에서 겉넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24 인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겉넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

대각선 : $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)$

$= 6^2 - 22 = 14$

$\therefore\ d = \sqrt{14}$

13. 등식 $x^2-2x+3=a+b(x-1)+c(x-1)^2$ 이 x에 관한 항등식일 때, $a^2+b^2+c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2-2x+3=a+b(x-1)+c(x-1)^2$

$x=1$을 대입하면 $2=a$ ······①

$x=0$을 대입하면 $3=a-b+c$ ······②

$x=2$를 대입하면 $3=a+b+c$ ······③

①을 ②, ③에 대입하여 정리하면

$b-c=-1$, $b+c=1$

두 식을 연립하면 $b=0$, $c=1$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=4+0+1=5$

14. 세 실수 a, b, c에 대하여 $(a,\ b,\ c) = ab + bc$로 정의한다. 이때, 등식 $(x,\ a,\ y) - (2x,\ b,\ y) = (x,\ 2,\ y)$이 임의의 실수 x, y에 대하여 성립하도록 a, b의 값을 정하면?

① $a = 1,\ b = 2$ ② $a = 2,\ b = 2$ ③ $a = 2,\ b = 0$

④ $a = 0,\ b = 2$ ⑤ $a = 0,\ b = 0$

해설

기호의 정의에 따라서 주어진 식을 다시 쓰면

$(ax + ay) - (2bx + by) = 2x + 2y$

이 식을 x, y에 대하여 정리하면

$(a - 2b - 2)x + (a - b - 2)y = 0$

이 등식이 임의의 x, y에 대하여 성립하므로

$a - 2b - 2 = 0,\ a - b - 2 = 0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2,\ b = 0$

15. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 $(x-1)^2$을 나누었을 때 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로

x^3+ax^2+bx+3

$=(x-1)^2(x+k)+2x+1$

$=x^3+(k-2)x^2+(3-2k)x+k+1$

양변의 계수를 비교하면

$a=k-2,\ b=3-2k,\ 3=k+1$

$k=2$이므로 $a=0,\ b=-1$

$\therefore\ a-b=0-(-1)=1$

16. $x^3 - x^2 + 2 = (x+1)^3 + a(x+1)^2 + b(x+1) + c$ 가 항등식일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

조립제법에 의한 방법으로 풀면

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\
 & & -1 & 2 & -2 \\
\hline
-1 & 1 & -2 & 2 & \boxed{0} \\
 & & -1 & 3 & \\
\hline
-1 & 1 & -3 & \boxed{5} & \\
 & & -1 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{-4} & &
\end{array}
$$

$\therefore\ a = -4,\ b = 5,\ c = 0$

$\therefore\ a + b + c = 1$

해설

주어진 식의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$2 = 1 + a + b + c$

$\therefore\ a + b + c = 1$

17. 다항식 $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 2$ 를 $x - 1$ 로 나누면 나누어떨어지고, $x + 1$ 로 나누면 나머지가 2 라고 한다. mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(1) = 1 + m + n + 2 = 0,\ m + n = -3$

$f(-1) = -1 + m - n + 2 = 2,\ m - n = 1$

두 식을 연립하여 풀면 $m = -1,\ n = -2$

$\therefore\ mn = 2$

18. x의 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누면 -3이 남고, $x+3$으로 나누면 27이 남는다. 이 $f(x)$를 $(x-2)(x+3)$으로 나눌 때, 그 나머지는?

① $6x-9$ ② $-6x+9$ ③ $2x+3$

④ $-2x-3$ ⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 $(x-2)(x+3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$

문제의 조건으로부터

$f(2)=-3,\ f(-3)=27$이므로

$2a+b=-3,\ -3a+b=27$

$\therefore\ a=-6,\ b=9$

따라서 구하는 나머지는 $-6x+9$이다.

19. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x+2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$ 라 하면

$f(-2)=-5Q(-2)-4$

그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

20. 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이고, 또 $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -2이다. $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=(x-3)Q(x)+1$

$Q(2)=-2$

$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 $f(2)$이다.

$$
\begin{aligned}
f(2) &= (2-3)Q(2)+1 \\
&= -1\times(-2)+1=3
\end{aligned}
$$

21. x의 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눌 때, 나머지가 2이다. 이 때, $\left(x^2-x+3\right)f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지를 구하면?

① 10 ② 6 ③ 0 ④ 30 ⑤ 12

해설

$f(-1)=2$
$\left(x^2-x+3\right)f(x)=(x+1)Q(x)+R$
$x=-1$ 대입
$\therefore R=5f(-1)=5\times 2=10$

22. x에 대한 다항식 x^3+2x^2-ax+b가 x^2+x-2로 나누어 떨어질 때, a^2+b^2의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$f(x)=x^3+2x^2-ax+b=(x^2+x-2)Q(x)$$
$$=(x+2)(x-1)Q(x)$$

인수정리에 의해 $x=-2, x=1$을 대입하면 우변이 0 이 된다.

$\therefore f(-2)=-8+8+2a+b=0$

$f(1)=1+2-a+b=0$ 연립하면, $a=1, b=-2$

$\therefore\ a^2+b^2=5$

23. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

$$
\begin{array}{c|cccc}
k & 1 & a & b & 1 \\
 & & c & d & 1 \\
\hline
 & 1 & 3 & -1 & \boxed{2}
\end{array}
$$

① $a=3$　② $b=2$　③ $c=-1$

④ $d=-3$　⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{c|cccc}
-1 & 1 & a & b & 1 \\
 & & -1 & -a+1 & -b+a-1 \\
\hline
 & 1 & a-1 & b-a+1 & \boxed{-b+a}
\end{array}
$$

이때 $k=-1$, $c=-1$, $d=-a+1$, $b-a+1=-1$, $-b+a=2$ 이므로

$k=-1$, $c=-1$, $a=4$, $b=2$, $d=-3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

24. 다음 중 $(x+y)^3-8y^3$ 의 인수인 것은?

① $x^2-2xy-4y^2$ ② $x^2-2xy+4y^2$ ③ $x^2+2xy+4y^2$

④ $x^2-4xy-7y^2$ ⑤ $x^2+4xy+7y^2$

해설

(준식)$=(x+y)^3-(2y)^3$

$=\{(x+y)-2y\}\{(x+y)^2+(x+y)2y+(2y)^2\}$

$=(x-y)(x^2+2xy+y^2+2xy+2y^2+4y^2)$

$=(x-y)(x^2+4xy+7y^2)$

25. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

26. 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립할 때, x^2-y^2의 값은?

$$[(x+y)^n+(x-y)^n]^2-[(x+y)^n-(x-y)^n]^2=4\times 3^n$$

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 7 ⑤ 9

해설

$[(x+y)^n+(x-y)^n]^2-[(x+y)^n-(x-y)^n]^2$

$=4\times 3^n$

$4\{(x+y)(x-y)\}^n=4\times 3^n$

$4(x^2-y^2)^n=4\times 3^n$

$\therefore\ x^2-y^2=3$

27. 삼각형 ABC의 세변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$인 관계가 성립할 때 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① $b = c$인 이등변 삼각형

② $a = c$인 이등변삼각형

③ b가 빗변의 길이인 직각삼각형

④ 정삼각형

⑤ c가 빗변의 길이인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^2(a+b) + b^2(a+b) - c^2(a+b) \\ &= (a+b)\left(a^2 + b^2 - c^2\right) = 0\end{aligned}$$

$a^2 + b^2 = c^2 \ (\because \ a + b \neq 0)$

$\therefore c$가 빗변의 길이인 직각삼각형

28. a, b, c가 삼각형의 세변의 길이를 나타내고 $ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$인 관계가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=b$인 이등변 삼각형

② $a=c$인 이등변 삼각형

③ 정삼각형

④ a가 빗변인 직각 삼각형

⑤ b가 빗변인 직각 삼각형

해설

$ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$

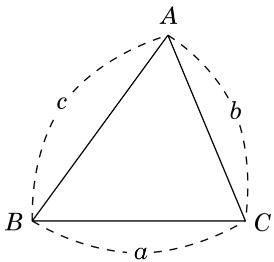
$a^2b+ab^2-bc(b+c)-ac^2+a^2c=0$

$(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b+c)=0$

$(b+c)\left\{a^2+(b-c)a-bc\right\}$

$=(b+c)(a+b)(a-c)=0$

29. 다음 그림과 같이 세 변의 길이가 a, b, c 인 $\triangle$ABC에서 $a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)=0$이 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?



① $a=b$인 이등변삼각형 ② $a=c$인 이등변삼각형

③ $\angle$A $=90^\circ$인 직각삼각형 ④ $\angle$B $=90^\circ$인 직각삼각형

⑤ $\angle$C $=90^\circ$인 직각삼각형

해설

$a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)$

$=a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2+b^2c+bc^2-c^2a-ca^2$

$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^3+b^2c+bc^2+c^3$

$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^2(b+c)+c^2(b+c)$

$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+(b+c)(b^2+c^2)$

$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)(a-b-c)$

$=(a-b-c)a^2-(b^2+c^2)(a-b-c)$

$=(a-b-c)(a^2-b^2-c^2)$

$=0$

이 때, a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a\neq b+c$

$\therefore\ a^2-b^2-c^2=0$,

즉 $a^2=b^2+c^2$

따라서, $\triangle$ABC는 a를 빗변으로 하는 직각삼각형,

즉 $\angle$A $=90^\circ$인 직각삼각형이다.

30. $\dfrac{2002^3-1}{2002\times2003+1}$ 의 값을 구하면?

① 1999　② 2000　③ 2001　④ 2002　⑤ 2003

해설

$a=2002$ 로 치환하면

$$\frac{a^3-1}{a(a+1)+1}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}=a-1$$

$\therefore\ 2002-1=2001$

31. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

32. $a^2b^3c^4$, $ab^2c^4e^3$ 의 최대공약수를 구하면?

① ab^2c^3　　② ab^2c^4　　③ ab^3c^4

④ $a^2b^3c^4$　　⑤ $ab^2c^4e^3$

해설

두 식의 공통인수 중 낮은 차수를 선택하여 곱한다.
$a^2b^3c^4$, $ab^2c^4e^3$ 에서
공통인수는 a, b, c 이고
차수가 낮은 것은 각각 a, b^2, c^4 이다.
이들을 모두 곱하면 최대공약수는 ab^2c^4

33. 두 다항식 $2x^2+2x-4$와 $4x^3-4$에 관한 설명이다. 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① 두 다항식은 $(x-1)$로 나누어 떨어지므로, $(x-1)$은 두 다항식의 공약수이다.

② 두 다항식은 공약수가 있으므로 서로소가 아니다.

③ $4(x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)$은 두 다항식의 공배수이다.

④ 두 다항식의 최대공약수는 $2(x-1)$이다.

⑤ 두 다항식의 최소공배수는 $(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)$이다.

해설

$2x^2+2x-4=2(x-1)(x+2)$

$4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

최대공약수 : $2(x-1)$

최소공배수 : $4(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$

34. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x+2$, 최소공배수가 $x^3+3x^2-10x-24$라고 한다. 이 때, 두 다항식을 바르게 구한 것은?

① $x^2-x-6,\ x^2+6x+8$

② $x^2-3x-1,\ x^2+x+8$

③ $x^2-4x+3,\ x^2-x+2$

④ $x^2-x-2,\ x^2-3x+8$

⑤ $x^2-3x-6,\ x^2+3x+7$

해설

두 다항식을 $A=aG$, $B=bG$ (a, b는 서로소)라고 하면
두 식의 최대공약수가 $x+2$이므로
$A=a(x+2)$, $B=b(x+2)$
따라서, $L=ab(x+2)$
$=x^3+3x^2-10x-24$이다.
이 때, 최소공배수 L은 최대공약수 $x+2$를 인수로 가지므로
조립제법을 이용하면
$L=(x+2)(x-3)(x+4)$
a, b는 일차식이므로
$a=x-3$, $b=x+4$ 또는 $a=x+4$, $b=x-3$
따라서, 두 다항식은
$(x-3)(x+2)=x^2-x-6$과 $(x+4)(x+2)=x^2+6x+8$이다.

35. 두 다항식 x^2+ax+b, $x^2+3bx+2a$의 최대공약수가 $x-1$일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 2　　② 1　　③ 0　　④ -1　　⑤ -2

해설

최대공약수가 $x-1$이므로
x^2+ax+b와 $x^2+3bx+2a$는
모두 $x-1$로 나누어 떨어져야 한다.
$\therefore\ 1+a+b=0$이고 $1+3b+2a=0$
따라서, $a=-2,\ b=1$
$\therefore\ a+b=-1$

36. x^2+ax-9 와 x^2+bx+c 의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9 이다. $a-b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a, b, c 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = x^2 + ax - 9 = Gp$

$B = x^2 + bx + c = Gq$ 라 하면

$A + B = (p+q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x+1)(x-3)$

$L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1)$

$= (x-1)(x^2-9) = (x-1)(x+3)(x-3)$

따라서, $G = x-3$, $p = x+3$, $q = x-1$ 이다.

$\therefore\ A = (x+3)(x-3) = x^2 - 9$

$\quad B = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

$\therefore\ a = 0,\ b = -4,\ c = 3$

$\therefore\ a - b + c = 7$

37. 최고차항의 계수가 1인 두 다항식의 곱이 $x^3 - x^2 - 8x + 12$ 이고, 최대공약수가 $x - 2$ 일 때, 두 다항식의 합을 구하면?

① $x^2 + 2x + 6$ ② $x^2 + 2x - 8$ ③ $x^2 + 4x - 8$

④ $x^2 + 4x + 8$ ⑤ $x^2 + 4x - 5$

해설

최대공약수가 $x - 2$이므로

구하는 두 다항식을 $a(x-2)$, $b(x-2)$ (단, a, b는 서로 소인 다항식)로 놓을 수 있다.

그런데, 두 다항식의 곱이 $x^3 - x^2 - 8x + 12$ 이므로

$a(x-2)b(x-2) = x^3 - x^2 - 8x + 12$

$\therefore\ ab(x-2)^2 = (x-2)^2(x+3)$

$\therefore\ ab = x + 3$

$\therefore\ a = 1,\ b = x + 3$ 또는 $a = x + 3,\ b = 1$

따라서 두 다항식은 $x - 2,\ (x-2)(x+3)$ 이다.

$\therefore\ x - 2 + x^2 + x - 6 = x^2 + 2x - 8$

38. x 에 대한 이차식 $A = x^2 + ax + b$, $B = x^2 + bx + a$ 의 최대공약수 G 가 x 에 대한 일차식이고 $A + B = G(px + q)$ 일 때, 상수 $a + b + p + q$ 의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

G 는 $A+B, A-B$ 의 인수가 된다.

$A - B = (a-b)x - (a-b) = (a-b)(x-1)$

$\therefore\ G = x - 1$

A 에 $x = 1$ 대입,

$1 + a + b = 0$, $a + b = -1$

$$\begin{aligned} A + B &= 2x^2 + (a+b)x + a + b \\ &= 2x^2 - x - 1 \\ &= (x-1)(2x+1) \end{aligned}$$

$p = 2,\ q = 1$

$a + b + p + q = -1 + 2 + 1 = 2$

39. 두 복소수 $z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 에 대하여 $z_1+(2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=8$

해설

$z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 를

$z_1+(2-4i) = z_2$ 에 대입하면

$1+(a-2)i+(2-4i) = (b-2)-ai$

$3+(a-6)i = (b-2)-ai$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3 = b-2$, $a-6 = -a$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$b=5,\ a=3$

$\therefore\ a+b=8$

40. $a = \dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때, $a + a^2 + a^3 + \cdots\cdots + a^{100}$ 의 값을 구하면?

① i ② $-i$ ③ -1 ④ 1 ⑤ 0

해설

$a = \dfrac{1+i}{1-i} = i$

$a + a^2 + a^3 + a^4 = i - 1 - i + 1 = 0$ 이고

$\therefore (a + a^2 + a^3 + a^4) + \cdots + (a^{97} + a^{98} + a^{99} + a^{100}) = 0$

41. $x = \sqrt{3} + 2i$, $y = \sqrt{3} - 2i$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 5　　② 7　　③ $2\sqrt{3} + 4i$

④ 12　　⑤ $12 + 2\sqrt{3}i$

해설

$x + y = 2\sqrt{3}$,

$xy = (\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i) = 3 - 4i^2 = 7$ 이므로

$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 7 = 5$ 이다.

42. 복소수 $z = 1 - i$ 라고 할 때, $wz + 1 = \overline{w}$ 를 만족하는 복소수 w 의 실수부분을 구하면? (단, $\overline{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① -2 ② -1 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$w = a + bi$ 라 하면

$$(a+bi)(1-i)+1 = a - ai + bi + b + 1$$
$$= (a+b+1) - (a-b)i$$
$$= a - bi \text{ 에서}$$

$a + b + 1 = a$, $\therefore$ $b + 1 = 0$ 이므로 $b = -1$

$a - b = b$ 이므로 $a + 1 = -1$ 에서 $a = -2$

따라서 w 의 실수부분은 -2

43. 복소수 z와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 다음을 만족하는 z 를 구하면?

$$z+\bar{z}=4, \quad z\cdot\bar{z}=7$$

① $z=1\pm\sqrt{3}i$ ② $z=2\pm\sqrt{3}i$ ③ $z=3\pm\sqrt{3}i$

④ $z=1\pm2\sqrt{3}i$ ⑤ $z=2\pm2\sqrt{3}i$

해설

$z=a+bi$

$z+\bar{z}=2a=4, z\cdot\bar{z}=a^2+b^2=7$

$\therefore a=2, b=\pm\sqrt{3}$

$\therefore z=2\pm\sqrt{3}i$

44. $(2-i)\bar{z}+4iz=-1+4i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 $z\bar{z}$의 값은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$z=a+bi$라 놓으면 $\bar{z}=a-bi$

$(2-i)(a-bi)+4i(a+bi)=-1+4i$

$(2a-5b)+(3a-2b)i=-1+4i$

$\therefore\ 2a-5b=-1 \cdots$ ㉠

$3a-2b=4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=1$

$\therefore\ z=2+i,\quad \bar{z}=2-i$

$\therefore\ z\bar{z}=(2+i)(2-i)=2^2-i^2=5$

45. 복소수 $z = a + bi$ $(a, b$: 실수$)$에 대하여 $< z >= b + ai$로 나타낸다. $z = \dfrac{4+3i}{5}$일 때, $5z^5 < z >^4$의 값을 구하면?

① $3 + 4i$ ② $4 + 3i$ ③ $5 + 4i$

④ $5 + 3i$ ⑤ $4 + 5i$

해설

$z < z >= (a + bi)(b + ai) = (a^2 + b^2)i$

$z = \dfrac{4+3i}{5}$ 이므로

$$z < z >= \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \right\} i = i$$

$$\begin{aligned} \therefore\ 5z^5 < z >^4 &= 5z(z < z >)^4 \\ &= 5\left(\frac{4+3i}{5}\right)(i)^4 \\ &= 4 + 3i \end{aligned}$$

46. $x = 3 + 2i$ 일 때, $x^2 - 6x - 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -23

해설

$x = 3 + 2i$ 에서 $x - 3 = 2i$ 의 양변을 제곱하면

$(x-3)^2 = (2i)^2 \qquad \therefore\ x^2 - 6x = -13$

$x^2 - 6x - 10 = -13 - 10 = -23$

$\therefore\ -23$

47. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 <u>아닌</u> 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 2　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 14

해설

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^{n} = i^n$$

$i^n = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m + 2$ $(m \geq 0)$

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

48. $x = \dfrac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^2 - x + 1$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1

④ $\dfrac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \dfrac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2 를 곱하면 $2x = 1 - \sqrt{3}i$

그러므로 $2x - 1 = -\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하면 $4x^2 - 4x + 1 = -3$

즉, $4x^2 - 4x + 4 = 0$

따라서, $x^2 - x + 1 = 0$

49. $x = -1 + i$ 일 때, $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$ 의 값을 구하면?

① $-1 + i$　　② $-i$　　③ i

④ -1　　⑤ 1

해설

$x = i - 1 \Rightarrow x + 1 = i$

양변을 제곱해서 정리하면 $x^2 + 2x + 2 = 0$

$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$

$= x^2(x^2 + 2x + 2) - x^2 - x - 1$

$= -x^2 - x - 1 \ (\because \ x^2 + 2x + 2 = 0)$

$= -(-2x - 2) - x - 1$

$= x + 1 = i$

50. 실수 a, b 에 대하여 $\dfrac{\sqrt{b-1}}{\sqrt{a+1}} = -\sqrt{\dfrac{b-1}{a+1}}$ 이 성립할 때, $|a+1| + \sqrt{(b-1)^2}$ 을 간단히 하면?

① $a+b$　　② $a-b$　　③ $b-a$

④ $a-b+2$　　⑤ $b-a-2$

해설

$\dfrac{\sqrt{b-1}}{\sqrt{a+1}} = -\sqrt{\dfrac{b-1}{a+1}}$ 이므로

$a+1<0$, $b-1 \geq 0$

$$\begin{aligned} |a+1| + \sqrt{(b-1)^2} &= |a+1| + |b-1| \\ &= -(a+1) + (b-1) \\ &= -a-1+b-1 \\ &= b-a-2 \end{aligned}$$