1. 다음 방정식의 모든 근의 합을 구하여라.

$$x^3 - 13x + 12 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ & & 1 & 1 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x) = x^3 - 13x + 12$라고 하면 $f(1) = 0$이므로

$(x-1)(x^2+x-12) = 0$

$(x-1)(x+4)(x-3) = 0$

$\therefore\ x = -4$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$

$\therefore\ -4 + 1 + 3 = 0$

2. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

3. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$
② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$
③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$
④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$
⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore\ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow\quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식:
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
$\therefore$ ①이 조건에 맞다

4. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore\ xy=2$

5. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$에서

$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

ⅰ) $x = y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2,\ y = \pm 2$

ⅱ) $x = 2y$일 때

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2},\quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

6. 삼차방정식 $x^3-8x^2+17x-10=0$ 의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha-\beta-\gamma$ 의 값은?(단, $\alpha<\beta<\gamma$)

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

$x^3-8x^2+17x-10=0$ 인수분해하여 해를 구하면

$(x-1)(x-2)(x-5)=0$

$\therefore\ \alpha=1, \beta=2, \gamma=5$

$\therefore\ \alpha-\beta-\gamma=1-2-5=-6$

7. 방정식 $(x^2+x+2)^2+8=12(x^2+x)$ 의 모든 근의 합은?

① 1　② 0　③ -1　④ -2　⑤ -3

해설

$x^2+x=Y$ 라 하면, $(Y+2)^2+8=12Y$
$Y^2-8Y+12=0$, $(Y-2)(Y-6)=0$
$Y=2$ 또는 $Y=6$
(i) $Y=2$
$x^2+x-2=0 \Rightarrow x=-2$ 또는 $x=1$
(ii) $Y=6$
$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=-3$ 또는 $x=2$
∴ 모든 근의 합 $=-2$

8. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서
$x^2-2x=t$ 로 놓으면
$t(t-2)-3=0$,
$t^2-2t-3=0$
$(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(ⅰ) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$
(ⅱ) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$\therefore\ x=1$ (중근)
따라서, $-1\times3\times1=-3$

9. 사차방정식 $2x^4+7x^2-4=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\frac{\beta}{\alpha}$의 값은?

① $1+i$ ② i ③ 0 ④ -1 ⑤ 24

해설

$2x^4+7x^2-4=0$에서 $x^2=t$라 하면

$2t^2+7t-4=0$, $(2t-1)(t+4)=0$

$\therefore\ t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=-4$

$\therefore\ x=\sqrt{\frac{1}{2}}$ 또는 $x=\pm 2i$

이 때, α, β는 허근이므로

$\alpha=2i, \beta=-2i$ 또는 $\alpha=-2i,\ \beta=2i$

$\therefore\ \frac{\beta}{\alpha}=-1$

10. $x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$ 의 두 근이 $1 + i,\ 1 - i$ 일 때, 이 방정식의 나머지 두 근을 구하면?

① $x = -\frac{-1 + - \sqrt{3}i}{2}$　　② $x = \frac{1 + - \sqrt{3}i}{2}$

③ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$　　④ $x = -1 \pm \sqrt{3}i$

⑤ $x = 1 \pm \sqrt{3}i$

해설

$x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$ 의 두근이 $1 + i,\ 1 - i$ 이므로
$x^2 - 2x + 2$ 는 $x^4 - x^3 + x^2 + 2$ 의 인수이다.
따라서,
$\therefore x^4 - x^3 + x^2 + 2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + x + 1)$
$\therefore x^2 + x + 1 = 0$ 일 때의 근은 $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

11. 방정식 $x^3+x^2+px+q=0$ 에 대하여 한 근이 $1-i$ 일 때, $p+q$ 값을 구하면?

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

한 근이 $1-i$이므로
켤레복소수인 $1+i$ 도 근이 된다. 나머지 한 근을 α 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해
$-1=(1-i)+(1+i)+\alpha \therefore \alpha=-3$
$p=(1-i)(1+i)-3(1-i)-3(1+i)$
$\therefore p=-4$
$-q=(1-i)(1+i)\cdot(-3)=-6$
$\therefore q=6$
$\therefore\ p+q=-4+6=2$

12. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면$(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.

$\therefore\ b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4,\ b = 6$ 이다.

$\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

13. x에 대한 삼차방정식 $x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b의 합 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근을 $1 - \sqrt{2}$, 나머지 한 근을 β라 하면

$\left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right)\beta + \left(1 - \sqrt{2}\right)\beta = 5$

$-1 + 2\beta = 5,\ 2\beta = 6 \quad \therefore\ \beta = 3$

따라서, $a = \left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(1 - \sqrt{2}\right) + 3 = 5$

$b = \left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right) \cdot 3 = -3$이므로

$a + b = 5 + (-3) = 2$

14. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{180} 의 값을 구하면?

① 180 ② -180 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 양변에

$(x+1)$ 을 곱하면, $x^3 + 1 = 0$

$x^3 = -1 \Rightarrow x^{180} = (x^3)^{60} = (-1)^{60} = 1$

15. 1의 세제곱근 중 하나의 허근을 ω라 할 때, 다음 중 <u>틀린</u> 것은?

① $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

② $\omega^3 = 1$

③ 1의 세제곱근은 $1,\ \omega,\ \omega^2$으로 나타낼 수 있다.

④ $\omega^2 = \overline{\omega}$(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

⑤ $\omega = -\omega^2$

해설

$x^3 = 1 \Rightarrow$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0, \quad \omega^3 = 1 \cdots$①,②

$x = 1,\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면 $\cdots$③

$\omega^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \overline{\omega} \cdots$④

$\omega = -1 - \omega^2 \cdots$⑤(거짓)

16. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\omega^2 + \omega + 1 = 0$　　② $\omega + \frac{1}{\omega} = -1$

③ $(1+\omega^2)^2 = \omega$　　④ $(1+\omega)^{10} = \omega^2$

⑤ $\omega^3 = 1$

해설

$x^3 = 1$

$(x^3 - 1) = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

ω는 $x^2 + x + 1 = 0$의 한 근이다.

$\omega^3 = 1,\ \omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots$①

①식을 ω로 나누면

$\omega + \frac{1}{\omega} = -1$(○)

③ $(1+\omega^2)^2 = (-\omega)^2 = \omega^2$(×)

④ $(1+\omega)^{10} = (-\omega^2)^{10}$

$= \omega^{20}$

$= (\omega^3)^6\omega^2$

$= \omega^2$ (○)

17. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^6+\omega^2+\omega+1$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$(\omega^3)^2+(\omega^2+\omega+1)=1^2+0=1$

18. 방정식 $x^3+2x^2-3x+1=0$의 세 실근을 α, β, γ 라 할 때, $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$의 값을 구하면?

① 7　　② 11　　③ 15　　④ 19　　⑤ 21

해설

근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$, $\alpha\beta\gamma=-1$
$x^3+2x^2-3x+1=0$의 세 근이 α ,β ,γ이므로$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ 이다. $x=2$를 대입하면 $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=2^3-2^2(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=2^3+2\times2^2-2\times3+1$
$=8+8-6+1=11$

19. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+2xy+y^2 \quad =1 \end{cases}$ 에서 xy 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y=x-3$ 을 이차식에 대입하면
$x^2+2x(x-3)+(x-3)^2=1$
$x^2-3x+2=0$
$\therefore\ x=1, 2$
(i) $x=1$ 일 때 $y=-2$
(ii) $x=2$ 일 때 $y=-1$
따라서 $xy=-2$

20. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ x^2+2xy-3y^2=-4 \end{cases}$ 의 해를 $x=a,\ y=b$라 할 때, 다음 중 a 또는 b의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ -1

해설

$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 & \cdots ① \\ x^2+2xy-3y^2=-4 & \cdots ② \end{cases}$

①에서 $(x+y)(x+2y)=0$,
$x=-y, x=-2y$
ⅰ) $x=-y$를 ②에 대입 $y^2=1$
$\therefore\ y=\pm 1, x=\pm 1$(복호동순)
ⅱ) $x=-2y$를 ②에 대입 $y^2=\frac{4}{3}$
$\therefore\ y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, x=\mp\frac{4\sqrt{3}}{3}$(복호동순)
그러므로 $x,\ y$값이 될 수 없는 것은
② $\frac{1}{3}$

21. 사차방정식 $x^4-x^3-4x^2-x+1=0$을 만족하는 실수 x에 대하여 $x+\frac{1}{x}=a$라 하자. 이 때, a가 될 수 있는 모든 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4-x^3-4x^2-x+1=0$의 양변을
x^2으로 나누면
$x^2-x-4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$
$x+\frac{1}{x}=a$로 치환하면
$x^2-a-6=0$, $(a-3)(a+2)=0$
$\therefore\ a=3$ 또는 $a=-2$
따라서, 모든 A의 값의 합은 $3+(-2)=1$

22. $x^4+2x^3+(a-1)x^2-2x-a=0$의 네 근이 모두 실수가 되도록 실수 a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4+2x^3+(a-1)x^2-2x-a=0$에서 $x=1, x=-1$일 때 성립하므로
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $=(x-1)(x+1)(x^2+2x+a)=0$
따라서 모두 실근이 되려면
$x^2+2x+a=0$의 $\frac{D}{4}\geq 0$이어야 하므로
$1^2-1\cdot a\geq 0 \quad \therefore a\leq 1$
따라서 a의 최댓값은 1이다.

23. $x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $y = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $x^5 + y^5 = 1$　　② $x^7 + y^7 = 1$　　③ $x^9 + y^9 = 1$

④ $x^{11} + y^{11} = 1$　　⑤ $x^{13} + y^{13} = 1$

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 는 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이다

$\therefore\ x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0$

$\therefore\ x^3 = y^3 = -1,\ x + y = 1,\ xy = 1$

① : $x^5 + y^5 = x^3 \times x^2 + y^3 \times y^2 = -(x^2 + y^2) = -\{(x+y)^2 - 2xy\} = 1$

② : $x^7 + y^7 = (x^3)^2 x + (y^3)^2 y = x + y = 1$

③ : $x^9 + y^9 = (x^3)^3 + (y^3)^3 = -2$

④ : $x^{11} + y^{11} = (x^3)x^2 + (y^3)^3 y^2 = -(x^2 + y^2) = 1$

⑤ : $x^{13} + y^{13} = (x^3)^4 x + (y^3)^4 y = x + y = 1$

24. x, y에 관한 연립방정식

$$\begin{cases} kx+(1-k)y=2k+1 \\ akx+(k+1)y=b+4k \end{cases}$$ 가 k의 값에 관계없이 일정한 근을 갖도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$kx+(1-k)y=2k+1$ ⋯⋯㉠
$akx+(k+1)y=b+4k$ ⋯⋯㉡
㉠에서 $(x-y-2)k+(y-1)=0$
$\Rightarrow x-y-2=0,\ y-1=0$
$\therefore\ x=3,\ y=1$ ⋯⋯㉢
㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면
$(3a-3)k+(1-b)=0$
$\therefore\ a=1,\ b=1$
$\therefore\ a+b=2$

25. A, B 두 사람이 어떤 물건을 3 개월 할부로 공동 구입하였다. 첫달에 A, B 중 한 사람이 다른 사람보다 돈을 많이 지불하였기 때문에 두 번째 달부터는 전달에 많이 지불한 사람은 전달보다 20 % 적은 금액을 지불하고, 적게 지불한 사람은 전 달보다 3000 원 많은 금액을 지불하기로 하였다. 금액을 모두 지불하고보니 A, B는 전체 액수의 반씩을 부담하게 되었다. 이 물건을 사는 데 든 비용은 전부 얼마인가? (단, 두 번째 달의 B의 지불금액은 A의 지불금액보다 6000 원이 많았다.)

① 27000 원 ② 30000 원 ③ 81000 원
④ 162000 원 ⑤ 570000 원

해설

첫달에 A, B가 지불한 금액을 각각 x원, y원이라 하면 각자가 지불한 금액의 총합은 다음과 같다.

$A : x + 0.8x + (0.8x + 3000)$

$B : y + (y + 3000) + 0.8(y + 3000)$

따라서 $x + 0.8x + (0.8x + 3000) = y + (y + 3000) + 0.8(y + 3000) \cdots\cdots$ ㉠

$0.8x + 6000 = y + 3000 \cdots\cdots$ ㉡

또, ㉠, ㉡에서 $x = 30000$, $y = 27000$

따라서, A가 지불한 금액은

$30000 + 0.8 \times 30000 + 0.8 \times 30000 + 3000 = 81000$

그런데 물건을 사는 데 든 총 비용은 한 사람이 지불한 금액의 2 배이다.

$\therefore$ (지불한 총 금액)$= 81000 \times 2 = 162000$(원)