

1. x 에 대한 항등식 $a(x+1) + b(x-1) = x+3$ 에서 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

▷ 정답: $b = -1$

해설

준식을 정리하면
 $(a+b)x + a - b = x + 3$
계수비교법에 의하여
 $a + b = 1, a - b = 3$
연립하여 풀면
 $\therefore a = 2, b = -1$

2. x 에 대한 항등식 $ax^2 - 5x + c = 2x^2 + bx - 1$ 에서 a, b, c 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

▷ 정답: $b = -5$

▷ 정답: $c = -1$

해설

계수비교법에 의하여 동차의 계수가 같아야 한다.

$\therefore a = 2, b = -5, c = -1$

3. 다음 등식 중에서 x 에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 것을 모두 고르면?

① $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$ ② $x^2 - x = x(x+2)$

③ $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ④ $x(x-2) = 0$

⑤ $x+y = x-y$

해설

②는 $x = 0$ 일 때만 성립하고,
④는 $x = 0, 2$ 일 때만 성립한다.
그리고 ⑤는 $y = 0$ 일 때만 성립한다.
①과 ③은 모든 실수에 대하여 성립한다.

4. x 의 값에 관계없이 등식 $x^2 + 13x - 18 = a(x+2)(x-3) + bx(x+2) + cx(x-3)$ 이 항상 성립할 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

해설

준식에

$$x = 0 \text{을 대입하면 } -18 = -6a \text{에서 } a = 3$$

$$x = 3 \text{을 대입하면 } 30 = 15b \text{에서 } b = 2$$

$$x = -2 \text{을 대입하면 } -40 = 10c \text{에서 } c = -4$$

$$\therefore a + b + c = 3 + 2 + (-4) = 1$$

5. 등식 $2x^2 - 6x - 2 = a(x+1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x+1)$ 가 x 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

$x = 0$ 을 대입하면: $a = 1$
 $x = -1$ 을 대입하면: $b = 2$
 $x = 2$ 을 대입하면: $c = -1$
 $\therefore a + b + c = 2$

6. 임의의 실수 x, y 에 대하여, $(x+y)a^2 + (x-y)b = 4x+y$ 가 성립할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

- ① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ $\frac{17}{4}$ ④ $\frac{19}{4}$ ⑤ $\frac{21}{4}$

해설

$$(a^2 + b)x + (a^2 - b)y = 4x + y$$

$$a^2 + b = 4 \cdots \text{①}, a^2 - b = 1 \cdots \text{②}$$

$$\text{①, ②에서 } a^2 = \frac{5}{2}, b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{19}{4}$$

7. $x-y=1$ 을 만족하는 임의의 실수 x, y 에 대하여 $ax^2+bx+cy^2-1=0$ 이 항상 성립할 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = x - 1$ 을 준식에 대입하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $(a+b+c)x^2 - (b+2c)x + c - 1 = 0$
 x 에 대한 항등식이므로
 $a+b+c=0, b+2c=0, c-1=0$
 $\therefore a=1, b=-2, c=1$
 $\therefore a+b+c=0$

8. 다항식 x^3+ax-8 을 x^2+4x+b 로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$ 가 되도록 상수 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -7

해설

x^3+ax-8 을 x^2+4x+b 로 직접나눈 나머지는
 $(a-b+16)x+4b-8$
 $(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots\textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 x 에 대한 항등식이므로,
 $a-b+16=3, 4b-8=4$
 $\therefore a=-10, b=3$
 $\therefore a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$ 의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10, b=3, p=-4$ 를 구해도 된다.

9. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은?

① $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$

② $\frac{1}{2}(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

③ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

④ $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

해설

직육면체의 대각선의 길이가 28 이므로
가로를 a , 세로를 b , 높이를 c 라고 했을 때
 $(a^2 + b^2) + c^2 = 28^2$
모든 모서리의 길이의 합이 176 이므로
 $a + b + c = 44$
따라서 ③번과 같은 식을 사용하여 겉넓이를 구할 수 있다.

10. x 의 다항식 $x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때, 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때,
몫을 $x + q$ 라 하면 (일반적으로 $px + q$ 로 해야겠지만 x^3 의 계수가 1이므로 $x + q$)

$$x^3 + ax + b = (x^2 - 3x + 2)(x + q) + 2x + 1$$

$$\therefore x^3 + ax + b = (x - 2)(x - 1)(x + q) + 2x + 1$$

이 등식은 x 에 관한 항등식이므로

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 + a + b = 2 + 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 8 + 2a + b = 4 + 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = -5, b = 7$$

$$\therefore a + b = 2$$

11. 다항식 $x^{22} + x^{11} + 22x + 11$ 을 $x + 1$ 로 나눈 나머지는?

- ① -33 ② -22 ③ -11 ④ 11 ⑤ 33

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{22} + x^{11} + 22x + 11 \text{ 이라 하면,} \\ f(x) &= (x+1)Q(x) + R \text{ 에서 } f(-1) = R \text{ 이므로} \\ f(-1) &= (-1)^{22} + (-1)^{11} - 22 + 11 = -11 \end{aligned}$$

12. 다항식 $x^3 + 5x^2 - kx - k$ 가 $x - 1$ 로 나누어 떨어지도록 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

인수정리에 의해서 $x = 1$ 을 대입하면

$$1^3 + 5 \times 1^2 - k \times 1 - k = 0$$

$$\therefore k = 3$$

13. 다항식 $x^{22} + x^{11} + 22x + 11$ 을 $x + 1$ 로 나눈 나머지는?

- ① -33 ② -22 ③ -11 ④ 11 ⑤ 33

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{22} + x^{11} + 22x + 11 \text{ 이라 하면,} \\ f(x) &= (x+1)Q(x) + R \text{ 에서 } f(-1) = R \text{ 이므로} \\ f(-1) &= (-1)^{22} + (-1)^{11} - 22 + 11 = -11 \end{aligned}$$

14. x 에 대한 다항식 $x^3 - 2x^2 - px + 2$ 가 $x - 2$ 로 나누어떨어지도록 상수 p 의 값을 정하면?

- ① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 3

해설

$x^3 - 2x^2 - px + 2 = f(x)$ 로 놓으면 $f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어떨어지려면

$f(2) = 0$ 이므로,

$$f(2) = 8 - 8 - 2p + 2 = 0$$

$$\therefore p = 1$$

15. x^3 의 항의 계수가 1인 삼차 다항식 $P(x)$ 가 $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ 을 만족할 때, $P(4)$ 의 값은?

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

인수정리에 의해

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$P(4) = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

16. 다항식 $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - k$ 가 $x - 2$ 를 인수로 가질 때, k 의 값은?

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

해설

$$f(2) = 24 - 16 + 4 - k = 0$$

$$\therefore k = 12$$

17. x 에 대한 다항식 $x^3 + 2x^2 - ax + b$ 가 $x^2 + x - 2$ 로 나누어 떨어질 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + b = (x^2 + x - 2)Q(x) \\ = (x + 2)(x - 1)Q(x)$$

인수정리에 의해 $x = -2, x = 1$ 을 대입하면 우변이 0이 된다.

$$\therefore f(-2) = -8 + 8 + 2a + b = 0$$

$$f(1) = 1 + 2 - a + b = 0 \text{ 연립하면, } a = 1, b = -2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

18. 다항식 $ax^3 + bx^2 - 4$ 가 $x^2 + x - 2$ 로 나누어 떨어지도록 a, b 를 정할 때, a 와 b 의 곱을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 - 4 &= (x^2 + x - 2)Q(x) \\ &= (x-1)(x+2)Q(x) \end{aligned}$$

양변에 $x=1, x=-2$ 를 각각 대입하면
 $a+b-4=0, -8a+4b-4=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=3$
 $\therefore ab=3$

해설

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 - 4 &= (x^2 + x - 2)(ax + 2) \end{aligned}$$

우변을 전개하여 계수를 비교하면
 $a=1, b=3 \therefore ab=3$

19. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 - x + b$ 를 $x-3$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $a + b + c + d + k$ 의 값을 구하면?

$$\begin{array}{r|rrrr} k & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & 33 \\ \hline & 1 & 4 & 11 & \underline{37} \end{array}$$

- ① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

해설

다항식 $x^3 + ax^2 - x + b$ 를 $x-3$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & a & -1 & b \\ & & 3 & 3a+9 & 9a+24 \\ \hline & 1 & a+3 & 3a+8 & \underline{9a+b+24} \end{array}$$

이때 $k = 3, c = 3, a + 3 = 4, 3a + 9 = d, 9a + b + 24 = 37$

이므로

$$k = 3, c = 3, a = 1, d = 12, b = 4$$

$$\text{따라서 } a + b + c + d + k = 1 + 4 + 3 + 12 + 3 = 23$$

20. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x-1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i = 1$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 옳게 구한 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & b & c \\ & & d & e & f \\ \hline & 1 & g & h & i \end{array}$$

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & b & c \\ & & 1 & a+1 & a+b+1 \\ \hline & 1 & a+1 & a+b+1 & a+b+c+1 \end{array}$$

이때 $a+b+c+1 = 1$ 이므로

$$a+b+c = 0$$

따라서 ③이다.